CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 12
Primavera 2020
Sucesiones. Series. Series de Taylor

Sucesiones de números reales

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

   (a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

   (b) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

   (c) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

   (d) $a_n = nr^n$, si $|r|<1$ es fijo.

   (e) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$.

   (f) $a_n = \dfrac{(-1)^n+1}{n}$.

   (g) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.

   (h) $a_n = (\ln n)^{1/n}$. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

   (i) $a_n = (p(n))^{1/n}$, en donde $p(x) = b_0 + b_1x^1 + \ldots + b_mx^m$ es un polinomio de grado m y $b_0, b_1, \ldots, b_m$, son reales positivos fijos.

2. Usa la prueba del cociente o la prueba de la raíz n-ésima para sucesiones (enunciadas al final de este laboratorio) para estudiar la naturaleza de las siguientes sucesiones $\{a_n\}$:

   (a) $a_n = n^5e^{-n}$.

   (b) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$.

   (c) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

   (d) $a_n = \dfrac{n!\,n!}{(2n)!}$.

3. Demuestra que:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0<\alpha\leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha>1. \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b), \quad a, b > 0.$

4. Sea $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, dx, \; n = 0, 1, 2, \ldots$. Demuestra que $I_n = (-1)^n \, n!$ Sugerencia: integra por partes y calcula la integral impropia usando la regla de L'Hopital.

5. Demuestra que toda sucesión convergente está acotada.

6. Prueba rigurosamente (ε y N) que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2}{1+n^2} = 4$.

Series de números reales. Convergencia de series

1. Encuentra el valor de la suma:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n-1}}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+1}}{6^n}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right).$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}.$ Sugerencia: usa fracciones parciales.

2. Estudia la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n}}{n}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^{1/n}.$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3! \; n! \; 3^n}.$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^n.$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{2^n} \right).$

3. Analiza si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$.

4. Determina para qué valores de α son absolutamente convergentes o divergentes las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+\operatorname{sen}\alpha)^{n}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^{\alpha}+1}$.

Series de potencias. Series de Taylor

1. Encuentra el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{\pi^{n+2}} x^{n+3}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(3x+2)^n}{4^n(2n)}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$.

2. Considera la serie potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+a)^{n+1}}$, con $a > 0$. Determina a de modo que el radio de convergencia de la serie sea igual 3.

3. (a) Determina el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

   (b) Utilizando el inciso anterior, calcula $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n)!}$.

4. Determina el valor exacto de $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

   Sugerencia: Deriva término a término la serie

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

5. Demuestra que $\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

   Sugerencia: Usa $\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ e integra término a término la serie de potencias de $\frac{1}{1+t^2}$.

6. La serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. A partir de esta información:

   (a) Calcula $1 + \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \frac{(\ln 2)^4}{4!} + \dots$

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $g(x) = e^{-2x^2}$ en $x_0 = 0$.

   (c) Demuestra que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1$, con $\lambda > 0$ una constante.

7. La serie de Taylor generada por $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ es $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. A partir de esta información:

   (a) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en $x_0 = 0$.

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = x\ln(1+x^2)$ en $x_0 = 0$.

8. ¿Qué función tiene como serie de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n$? ¿Para qué valores de x es válido este desarrollo?

9. Considera la integral $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)dx$.

   (a) Expresa la integral como una serie infinita.

   (b) Determina el valor de la integral con un error menor que 10^{-4}.

Prueba del cociente para sucesiones. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de reales positivos tales que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ y si $0 \leq L < 1$, entonces $\{a_n\}$ converge y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prueba de la raíz n-ésima para sucesiones. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de reales no negativos tales que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ y si $0 \leq L < 1$, entonces $\{a_n\}$ converge y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.