Cálculo Diferencial E Integral 1.

Laboratorio 10.

Departamento de Matemáticas.

ITAM.

20 de abril de 2020.

1. Para las siguientes funciones obtener dominio, puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos locales, y máximos y mínimos absolutos:

i) $f(x) = x^3 + 2x^2$.

ii) $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$.

iii) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$.

2. Prueba que la función f satisface las hipótesis del TVM y calcula el punto c que satisface el teorema del valor medio para la siguiente función en el intervalo $[0, 4]$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < 2 \\ x^2 - x + 6, & x \geq 2 \end{cases}.$$

3. Dada $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$

Observa que $f(-\pi) = f(0) = 0$, pero no existe $x \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(x) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Rolle? Explica tu respuesta.

4. Dada $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$, $f(0) = 1$, $f(2) = 1$, pero $\nexists\, x \in (0, 2)$ tal que $f'(x) = 0$. ¿Por qué no contradice este ejercicio al teorema de Rolle?

5. Un termómetro de mercurio tardó 14 segundos en subir de $-19°$ C a $100°$ C cuando se sacó de un congelador y se colocó en agua hirviendo. Muestre que el mercurio en algún momento estaba subiendo a una razón de $8.5°$ C$/seg$.

6. Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos que $f(a) = g(a)$ y que $f(b) = g(b)$. Demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

7. Sea g una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Supongamos que g vale cero para tres valores distintos de x en (a, b). Pruebe que existen dos valores donde la derivada vale cero.

8. Calcular un punto del intervalo $[1,3]$ en el que la tangente a la curva $y = x^3 - x^2 + 2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos $A = (1,2)$ y $B = (3,20)$. ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

9. Demuestra que la ecuación $x^5 + 5x - k = 0$ tiene exactamente una solución en $\mathbb{R}$, independientemente del valor de k.

10. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Supongamos que $f'(x) \neq 0$ para toda $x \in (a,b)$ y que $f(a)f(b) < 0$. Probar que existe un único $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

11. Sea g una función continua y derivable en toda la recta real tal que $g(0) = 0$ y $g(2) = 2$. Probar que existe algún punto del intervalo $(0,2)$ tal que $g'(c) = 1$.

12. Dada $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $(0,2)$ tal que $f(0) = -2$, $f'(x) \leq 3$, $\forall\ x$. Demuestra entonces que $f(2) \leq 4$.

13. Sea f una función continua en $[1,2]$, derivable en $(1,2)$ y tal que $f'(x) \leq 1$, para toda $x \in (1,2)$. Demuestra entonces que $f(2) \leq f(1)$.

14. Demuestra que $|cos(x) - 1| \leq |x|$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. (Ayuda: Considera $f(t) = cos(t)$, $t \in [0,x]$).

15. Pruebe que si f es tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$, entonces f es una función constante. ¿Qué pasa si el exponente en vez de ser 2 es un número mayor?