Gradientes y Derivadas Direccionales

Nota: En algunos ejercicios se usa la notación $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x})$ para denotar la derivada direccional de una función f en la dirección de un vector $\vec{v}$ de norma 1 en el punto $\vec{x}$.

1. Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2 + y^2 = z^2 - z + 6xy - 6$ en el punto $(1, 1, 2)$.

2. Encuentra un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$ que sea normal a la superficie descrita por

$$e^{x+2z} + z^2 = xyz + 4 \text{ en el punto } (2, 1, -1).$$

3. (Tomado del examen de muestra GRE de Matemáticas) Sea g la función definida por $g(x, y, z) = 3x^2y + z$ para cualesquiera x, y, z reales. ¿Cuál de los siguientes números es el más cercano al valor exacto de la derivada direccional de g en el punto $(0, 0, \pi)$ en la dirección del vector $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$? (Nota: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores de la base canónica en $\mathbb{R}^3$ $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respectivamente.)

   A) 0.2 B) 0.8 C) 1.4 D) 2.0 E) 2.6

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - 3xy + 2xy^2$. Sea γ la curva de nivel de f que pasa por el punto $(2, -2)$. Encuentra un vector no nulo en $\mathbb{R}^2$ que sea perpendicular a dicha curva en el punto $(2, -2)$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a γ en el punto $(2, -2)$ en la forma $y = mx + b$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Suponer que una curva de nivel de f puede ser parametrizada por una trayectoria de clase C^1, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in \mathbb{R}$. Suponiendo que en t_0 se cumple que $\mathbf{c}'(t_0) \neq (0, 0)$ y que $\mathbf{c}(t_0) = (x_0, y_0)$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector $\mathbf{c}'(t_0)$?

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sean $\vec{v_1}$ y $\vec{v_1}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes y de norma 1. Supongamos que en un punto(x_0, y_0) se conoce el valor de las derivadas direccionales $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(x_0, y_0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v_2}}(x_0, y_0)$. Describe cómo encontrar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto (x_0, y_0) a partir de los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_1}$ y los valores de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v_2}}(x_0, y_0)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y, z) = x^2 - 3xyz + z^3y - 1$. Encuentra la dirección en la que f crece más a partir del punto $(2, 1, -1)$. ¿Cuál es el valor de la máxima razón de crecimiento en dicho punto?

8. Muestra que no existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ de norma 1 tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1/2, 2) = 4$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define como $f(x, y) = x^2 - \dfrac{y^2}{4}$.