

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 4

Primavera 2020

Función exponencial. Logaritmos y exponenciales en otras bases.

1. Sea $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

- (a) Encuentra el dominio de f .
- (b) Encuentra $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} f(x)$.
- (c) Determina los intervalos de monotonía, concavidad, valores extremos, puntos de inflexión y asíntotas.
- (d) Grafica la función f .

2. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + 2k - \frac{1}{2}, & \text{si } x > 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \\ \left(k^2 + \frac{k}{2}\right) \frac{\text{sen } x}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- (a) Determina k de modo que f sea continua en $x = 0$.
- (b) Demuestra que para todo $x > 0$, $e^{-1/x^2} \in (0, 1)$.
- (c) Para $k = 1/2$ define la inversa de la restricción de f a \mathbb{R}^+ .

3. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - \alpha|e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}$, en donde α es una constante real.

- (a) Determina el dominio de diferenciabilidad de f y calcula f' .
- (b) Estudia la monotonía y extremos relativos de f .
- (c) Indica, justificando, si f admite máximos y mínimos absolutos.
- (d) Justifica que f restringida al intervalo $(\alpha + 1, \infty)$ es invertible e indica el dominio de la respectiva función inversa. Calcula la derivada de la función inversa en el punto $f(\alpha + 2)$.

4. Sea $f > 0$ una función continua en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y diferenciable en (a, b) . Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a) \frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

5. En cada una de las siguientes expresiones despeja y :

(a) $\log_3(1 - y) - \log_3(y) - x = 0$, $0 < y < 1$.

(b) $2^{-\log_2 y} = 5e^{-\ln y} - 4^{\log_2 3}$, $y > 0$.

(c) $\frac{5^y - 5^{-y}}{2} = 3$.

6. Prueba que si $x > 0$ y $x^{(x)^x} = (x^x)^x$, entonces $x = 1$ o $x = 2$.

7. Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

(a) $y = \frac{1}{e^{2x}} + \ln\left(\frac{1}{e^{2x} + 1}\right)$.

(b) $y = \log_3\left(\frac{3^x}{3^x + 1}\right)$.

(c) $y = (2^x + 1)^{1/x}$, $x > 0$.

(d) $y = x^x (\ln x)^{\ln x}$, $x > 1$.

(e) $y = (\ln x)^x + 2^{1/x}$, $x > 1$.

8. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

9. Determina las siguientes integrales:

(a) $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x} dx$. Simplifica la respuesta.

(b) $\int \frac{\sqrt{2 \tan x}}{\cos^2 x} dx$.

(c) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^x} dx$.