Instituto Tecnológico Autónomo de México
Departamento de Matemáticas

Cálculo Diferencial e Integral I — Primavera 2020

Laboratorio 7

---

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ para todos $x, y \in [0,1]$ y $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$. Demuestre que o bien $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$, o bien $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in [0,1]$.

2. Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ la función definida para $x \in (0,1)$ por:
$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}.$$
Calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Deduzca que el rango de f es todo $\mathbb{R}$.

3. Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(2\pi)$. Demuestre que existe algún $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = f(c + \pi)$.

4. Demuestre que la ecuación $\tan(x) = x^2 + 1$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, \pi/2)$.

5. Usando la definición, calcule $f'(x_0)$ si:
   (a) $f(x) = x^2 - 2,\ x_0 = 2.$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{2 + \sqrt{x}},\ x_0 = 4.$
   (c) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x}},\ x_0 = 0.$
   (d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{\tan(x)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0.$

6. Sea $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $a \in D_f$, punto interior de D_f. Demuestre que
$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t) - f(a - t)}{2t}.$$

7. Sea $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $a \in D_f$, punto interior de D_f. Demuestre que f es continua en a.