Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Diferencial e Integral I — Primavera 2020

Laboratorio 6

---

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ (x+k)(2+x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

   (a) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

   (b) Determine el valor de la constante k para la cual la función f es extensible por continuidad al punto $x = 0$.

   (c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esa extensión por continuidad, indique justificando el rango de F.

2. (a) Supongamos que f es una función que verifica $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en $x = 0$.

   (b) Supongamos que g es continua en el punto $x = 0$, $g(0) = 0$ y que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en $x = 0$.

   (c) Discuta si en el inciso (b) la afirmación es verdadera siendo $g(0) \neq 0$.

3. Supongamos que f es una función continua en $[0, 1]$ y $f(x) \in [0, 1]$ para todo x. Demuestre que $f(x) = x$ para algún número x.

4. Supongamos que f, g son funciones continuas en $[0, 1]$ y que $f(x) \in [0, 1]$ para todo x y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ o $g(0) = 1$, $g(1) = 0$. Demuestre que $f(x) = g(x)$ para algún número x.