Cálculo Diferencial e Integral 1.
Laboratorio 8.
ITAM.*

30 de marzo de 2020.

1. Demuestra usando la definición que si $g(x) = f(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = g'(x)$.

2. Encuentra los valores de $f(2)$ y $f'(2)$ si se sabe que la ecuación de la recta tangente a f en $x = 2$ es $y = 3x + 1$.

3. Sea $f(x) = x^3$.
a) Encuentra la recta tangente en el punto $x = a$.
b) Encuentra los puntos donde la recta tangente toca a la función. (Sugerencia: nota que $x = a$ es raíz de $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$).

4. Muestra que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encuentra el punto de tangencia.

5. Calcula la derivada de la función $f(x) = cos(\frac{x^3}{cos(x^2)})$.
6. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
a) Usando la definición calcule $f'(a)$, si $a \neq 0$. Recuerde que $(t-s)(t^2 + ts + s^2) = t^3 - s^3$.
b) Pruebe que $f'(0)$ no existe.
c) pruebe que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tiene una tangente vertical en $(0, 0)$.

7. Calcula $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x^2)}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 cos(\frac{1}{x^3}), & x > 0 \end{cases}$.

8. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|^2$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que $f(x)$ es una función constante. (Sugerencia: utilizar la definición de derivada para probar que $f'(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$).

9. ¿Cuántas rectas tangentes tiene la curva $y = \frac{x}{x+1}$ que pasan por el punto $(1, 2)$? En qué puntos esas rectas tangentes tocan a la curva.

*Depto de Matemáticas, ITAM.

10. Una función es par si $g(-x) = g(x)$, para toda x en D_g y una función es impar si $h(-x) = -h(x)$ para toda x en D_h. Pruebe que la derivada de una función f par, es una función impar.

11. Determina los valores de α y β de forma tal que $y = 3\alpha x + 4\beta$ sea la recta tangente a $f(x) = sen(x^2 + 3x) + cos(x^3 + x)$ en $x = 0$.

12. Calcula la ecuación de la recta tangente a $h(x) = \sqrt{g(x^2 + 2x + 3)}$ en $x = 0$ si $g(3) = 4$, $g'(3) = 2$.

13. Si se sabe que $f(0) = 1 = f'(0)$ y $f(2) = 4 = f'(2)$, calcular:

$$\left(\sqrt{f \circ (1 + f^2)}\right)'(0).$$

14. Calcula la derivada de $f(t) = \operatorname{sen}(t^2)(\cos^2(2t^2 - 1))$.

15. Encuentra $\frac{d^2}{dx} cos(3x^3)$.

16. Calcula $f^{(2020)}(x)$ si $f(x) = sen(x) + cos(x)$.