Taller 5. Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2020

Regla de la Cadena (Parte II)

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $f(x,y) = f(x,xy)$ para toda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{G}(x,y) = (x,xy)$. Notando que $f(x,y) = f \circ \mathbf{G}(x,y)$ para toda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, aplica la regla de la cadena a $f \circ \mathbf{G}$ para demostrar que se cumplen las siguientes igualdades:

$$i) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,xy) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,xy), \quad ii) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial y}(x,xy).$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $w = f(x,y)$ con $x = 2u^2 - v$, $y = u + 3v^2$. La función f satisface las siguientes igualdades: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 6$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(7,5) = -4$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(7,5) = 2$. Elige las igualdades apropiadas y calcula el valor de $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ cuando $u = 2$, $v = 1$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y $z = f(x^2 - y^2)$ para toda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Muestra que $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y define $u : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $u(x,y) = xy\varphi\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$, donde $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$. Encuentra una función $\psi = \psi(x,y)$ de tal manera que u satisfaga

$$x^2 u_x(x,y) - y^2 u_y(x,y) = \psi(x,y)u(x,y), \text{ para toda } (x,y) \in V.$$

Nota: Se usa la notación u_x para denotar la derivada parcial de u respecto a x: $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.