

Taller 2. Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2020

Abiertos, cerrados, frontera, límites, continuidad

1. Justificar por qué el conjunto $\{2/n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es cerrado en \mathbb{R} , pero $\{n/2 \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en \mathbb{R} . ¿Qué número real se le debe añadir al primer conjunto para que sea cerrado?
2. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Demuestra que A es abierto en \mathbb{R}^2 demostrando que si $\vec{X}_0 = (x_0, y_0)$ está en A , entonces la bola abierta $B_r(\vec{X}_0)$ está contenida en A , donde $r = \min\{x_0, y_0, 1 - x_0, 1 - y_0\}$.
3. Si U es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , justifica por qué la frontera de U está en el complemento de U .
4. Muestra que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ no existe.
5. Usa el hecho de que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t)}{t} = 1$ para mostrar (con una argumento $\epsilon - \delta$) que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{xy} = 1$.
6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Muestra que f es continua en $(0, 0)$.