# Instituto Tecnológico Autónomo de México
# Departamento de Matemáticas

## Cálculo Diferencial e Integral I — Primavera 2020

## Laboratorio 5

---

1. Sean $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación a la derecha y a la izquierda de $D_f$ y $l \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, si y sólo si existen y son iguales a $l$ los límites laterales de $f$ en $a$, es decir, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

2. Calcule, si existieran, los siguientes límites, justificando el cálculo o la no existencia del límite.

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1 - \sqrt{x}}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x-2}$

   (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{3}{x}\right)$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$

   (h) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

   (i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|}{\cos(x)}$

3. Sea $f$ una función real de variable real que satisface $|f(x) + x^2 - x| < x^4$ para todo $x \neq 0$. Averigüe si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x}$ existe.

4. Sean $a$ y $b$ constantes reales distintas de cero. Determine la relación entre $a$ y $b$ de modo que:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi + ax)}{bx} - 2\right] = 0.$$

5. Demuestre la continuidad de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en cualquier punto $x_0 \in D_f$, determinando para cada $\epsilon > 0$ un número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ siempre que $|x - x_0| < \delta$.

6. Determine el conjunto de los valores del parámetro real $\alpha$ para los cuales la función definida por $f(x) = (\alpha x^2 - 2\alpha x + 1)^{-1}$ definida en $[0, 1]$ sea continua en todo el punto de ese intervalo.