Instituto Tecnológico Autónomo de México
Departamento de Matemáticas

Cálculo Diferencial e Integral I **Primavera 2020**

Práctica 2

---

1. Calcule, si existieran, los siguientes límites, justificando el cálculo o la no existencia del límite.

   (a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

   (b) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

   (c) $\lim_{x \to -1} \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

   (d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{5x^2 - x}$;

   (e) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$;

   (f) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$;

   (g) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x - 1}{x^3 - 2x - 1}$;

   (h) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{1 - x}$;

   (i) $\lim_{x \to 2} (2x - \sqrt{x+2})$;

   (j) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{(2-x)^2}}$;

   (k) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(x-a)^4 - a^4}{x}$, donde a es un parámetro real.

   (l) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}$

   (m) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - x}{x}$

   (n) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x \operatorname{sen} x}$

   (o) $\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(2x)}{1 + \operatorname{cotan} x}$

   (p) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

   (q) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

   (r) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$

2. Usando las expresiones

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \cos(a)\operatorname{sen}(b)+\operatorname{sen}(a)\cos(b)\\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b),\end{aligned}$$

demuestre que

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1+\cos(a)}{2},\qquad \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\cos(a)}{2}.$$

3. Demuestre que:

(a) $\operatorname{sen}(3x)=3\operatorname{sen}(x)-4\operatorname{sen}^3(x)$

(b) $\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)$

4. Demuestre que:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}=2$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen} x}=5$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}{x}=2$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a}=\cos a$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x)}{\operatorname{sen} x}=2$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

5. Calcule, si existieran, los siguientes límites, justificando el cálculo o la no existencia del límite.

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\tan x)}{\operatorname{sen} x}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\tan x}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{cotan}(2x)\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(2x)}{x+\operatorname{sen}(3x)}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

6. Calcule, si existieran, los siguientes límites laterales, justificando el cálculo o la no existencia del límite.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{|4-x^2|}{x^2+5x+6}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{|1-x^2|-x+1}{x^2-1}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\sqrt{x^2-x^4}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x-x^2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$

7. Demuestre que

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x^3}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| = 0$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(3x)}{x^4+1} = 0$

8. Determine las constantes α y β tales que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha x+\beta-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = 0.$$

9. Sea $D_f = [0,+\infty)\setminus\{1\}$ y considere la función $f: D_f \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ para todo $x \in D_f$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

10. Determine el valor de L de modo que la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ L & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

11. Considere la función h definida del modo siguiente:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \cos(x^2) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   (a) Estudie la continuidad de la función h.
   (b) Justifique que la función h es acotada en $\mathbb{R}^+$.

12. Dado un número real a, considere la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} x + a^2 + 6 & \text{si} \quad x < 3 \\ 9 - a & \text{si} \quad x = 3 \\ 3x + a & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

   Para qué valores de a:

   (a) existe $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$?
   (b) g es continua en $x = 3$?

13. Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ m^2 - 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$.

14. Estudie la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right) & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 5 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}.$$

15. Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la función definida por $f(x) = x^n$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, es una función continua en $\mathbb{R}$.

16. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$
   (c) $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$
   (d) $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$
   (e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$
   (f) $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$

17. Demuestre que la función definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, por $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, donde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, es una función continua en $\mathbb{R}$.

18. Sea f una función continua y no negativa en el intervalo (a, b). Demuestre que la función $F(x) = \sqrt{f(x)}$ también es continua en ese intervalo.

19. Demuestre que si f es continua en el punto $x = a$ y $f(a) > 0$, entonces f es positiva en un entorno de a.

20. Demuestre que si f es continua en el punto $x = a$ y $f(a) < 0$, entonces f es negativa en un entorno de a.