

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Laboratorio 2

Primavera de 2020

Teorema Fundamental del Cálculo. Integral por sustitución.

1. Halla la derivada de la función en cada inciso (sin integrar):

(a)  $G(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^4} dt.$

(b)  $G(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^4} dt.$

(c)  $G(t) = \int_0^{t^3} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

(d)  $G(x) = \int_0^1 x^2 \left( \frac{1}{1+s^3} \right) ds.$

(e)  $G(x) = \int_0^x x^2 \left( \frac{1}{1+s^3} \right) ds.$

2. Sea  $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7} dt$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- (a) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f$ .  
(b) Encuentra el punto  $x$  en donde  $F$  alcanza su valor mínimo.  
(c) Encuentra los intervalos en donde  $F$  es convexa (cóncava hacia arriba) y cóncava (cóncava hacia abajo).

3. Para  $\theta \in (\pi/2, \pi/2)$  define

$$S(\theta) = \int_0^{\text{sen } \theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Usa la regla de Leibniz para probar que  $S'(\theta) = 1$  para todo  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Concluye que  $S(\theta) = \theta$  para todo  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

4. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y positiva. Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida por

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^x f(t) dt.$$

- (a) Demuestra que  $g(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  
(b) Justifica que  $g$  es diferenciable en  $\mathbb{R}$  y entonces calcula  $g'(x)$ .

5. Sea  $f$  función continua en  $[a, b]$ . Demuestra que existe un número  $x \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt.$$

Sugerencia: Considera la función  $g(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt$ .

6. Calcula el siguiente límite (sin usar la regla de L'Hopital):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{t^4+1} dt.$$

Sugerencia: Usa  $F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$  y aplica el TFC.

7. Determina las siguientes integrales indefinidas:

(a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$

(b)  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx.$  Sugerencia:  $\sqrt{\frac{x-1}{x^5}} = \frac{1}{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

8. Calcula las siguientes integrales, usando el teorema del cambio de variable para integrales definidas (haz una sustitución y cambia los límites de integración):

(a)  $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} |\pi - 2x| dx.$

(b)  $\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}^3(2\theta)} d\theta.$

(c)  $\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^3+3}} dt, \text{ con } x \geq 1.$

(d)  $\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt.$

9. Sea  $f$  continua en el intervalo  $[a, b]$  y sea  $\lambda \neq 0$  una constante. Usa el teorema del cambio de variable para integrales definidas para demostrar:

(a)  $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda) dx.$

(b)  $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx.$