CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 1
Primavera 2020
La integral definida. Teorema del valor medio para integrales.

1. Evalúa la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ como el límite de una suma de Riemann, usando la partición de $[0,1]$ en donde
$$x_k = c_k = \frac{k^2}{n^2}$$
y, correspondientemente,
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

2. En cada inciso argumenta si en el intervalo dado la función es: (i) continua, (ii) acotada, (iii) integrable:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0) \\ 5, & x = 0 \\ -2, & x \in (0,1] \end{cases}$ en $[-1,1]$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ en $[-10\pi, 10\pi]$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ en $[0,1]$.

3. Calcula $\int_{-1}^1 |2x+1|\ dx$.

4. Determina $\int_{-2}^a |x|\ dx$. Analiza los casos $a \leq 0$ y $a > 0$.

5. Prueba que $\dfrac{x^6}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^6$, si $x \in [0,1]$. Concluye que
$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \frac{1}{7}.$$

6. Demuestra que si f es integrable en $[a,b]$, entonces
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$
Sugerencia: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

7. Sea $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ continua. Supón que $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$. Prueba que existe $c \in [1,3]$ tal que $f(c) = 2$.

8. Sabiendo que $\int_{-1}^{8} 3\sqrt{x+1}\,dx = 54$, encuentra un número real c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

9. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Sugerencia: para el caso $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, encuentra cotas inferior y superior para el cociente $\int_a^b f(x)g(x)\,dx / \int_a^b g(x)\,dx$ y luego utiliza el TVI.