Instituto Tecnológico Autónomo de México
Departamento de Matemáticas

Cálculo Diferencial e Integral I **Primavera 2020**

Práctica 1

---

1. Demuestre que

   (a) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x+3} < 2\right\} = (-\infty, -7) \cup (-3, +\infty)$

   (b) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x+3} \geq 2\right\} = [-7, -3)$

   (c) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-2}{x+3} < 2x\right\} = (-3, -2) \cup (-1/2, +\infty)$

   (d) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-2}{x+3} \geq 2x\right\} = (-\infty, -3) \cup [-2, -1/2]$

   (e) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+7}{x+3} \leq -3x\right\} = (-\infty, -3) \cup [-7/3, -1]$

   (f) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+7}{x+3} > -3x\right\} = (-3, -7/3) \cup (-1, +\infty)$

   (g) $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| = 3\} = \{-5, 1\}$

   (h) $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq 1\} = [-3, -1]$

   (i) $\{x \in \mathbb{R} : |3-x| > 2\} = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$

   (j) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\} = (-3, -2) \cup (2, 3)$

   (k) $\{x \in \mathbb{R} : 3 < 2|x-1| \leq 5\} = [-3/2, -1/2) \cup (5/2, 7/2]$

   (l) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| > 2 \ \wedge \ x \geq 0\} = [0, 1) \cup (5, +\infty)$

   (m) $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq 3 \ \wedge \ x+1 > 0\} = (-1, 1]$

   (n) $\{x \in \mathbb{R} : |3-2x| \leq |x+2|\} = (-\infty, 1/3] \cup [5, +\infty)$

   (o) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x-2|\} = \{1\}$

   (p) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq |x-2|\} = (-\infty, 1]$

   (q) $\{x \in \mathbb{R} : |2x-5| \geq |1-x|\} = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

   (r) $\left\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\right\} = (-3, -2) \cup (2, 3)$

   (s) $\left\{x \in \mathbb{R} : 9 < (x-1)^2 < 25\right\} = (-4, -2] \cup [4, 6)$

   (t) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0 \ \wedge \ x - 3 \leq 0\right\} = (-\infty, -1) \cup (1, 3]$

   (u) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0 \ \wedge \ x + 1 > 0\right\} = (-1, 2]$

   (v) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \geq 0\right\} = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

   (w) $\left\{x \in \mathbb{R} : 2 - x - x^2 > 0\right\} = (-2, 1)$

   (x) $\left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 1\right\} = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

   (y) $\{x \in \mathbb{R} : |x(x-3)| = |1-3x|\} = \{-1, 3-2\sqrt{2}, 1, 3+2\sqrt{2}\}$

2. Determine el conjunto solución de la siguientes desigualdades:

   (a) $\dfrac{x^2-5x+6}{1-x} \geq 0$

   (b) $\dfrac{2-|x-2|}{|x-3|-3} < 0$

   (c) $|2x-1|-|3x+1| < 4$

   (d) $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x-x^2} \leq 1$

   (e) $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2x}{4+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

3. Sean a, b, x, y números reales tales que $a < x < b$ y $a < y < b$. Demuestre que $|x-y| < b-a$.

4. Demuestre que si $|x-2| < \dfrac{1}{2}$, entonces $\left|\dfrac{4}{2x-1} - \dfrac{3}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$.

5. Demuestre que si $2 \leq |x+1| < 4$, entonces $4 \leq |x-1| + |x+3| < 8$ y $\dfrac{|x|}{|2x+1|} \leq \dfrac{3}{5}$.

6. Encuentre $\delta > 0$ para el cual

   (a) $|x-1| \leq \delta \;\Rightarrow\; |x-2| \leq 2$

   (b) $|x-2| \leq \delta \;\Rightarrow\; |2x-3| \leq 5$

7. Sea f la función definida por $f(x) = |x^2-3x+2|$. Determine el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}.$$

8. En cada uno de los siguientes incisos, determine el dominio de la función definida por

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-3x^2-2x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{x^2+x+1}$

   (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x+3|}{x+1}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$

   (e) $f(x) = \tan\dfrac{x}{2} - \operatorname{cotan}\dfrac{x}{2}$

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

   (g) $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x-2}{2}\right| - \left|\dfrac{x-1}{3}\right|}$

   (h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+3x}{2-\sqrt{2-x}}}$

   (i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x^3-25x}}$

9. Considere las funciones $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-4}{-x^2+3x}}$ y $g(x) = 3 - \sqrt{x+1}$.

   (a) Determine los dominios de las funciones f y g.
   (b) Determine las raíces de las funciones f y g.
   (c) Indique el conjunto imagen de g.
   (d) Defina las funciones $f+g$ y f/g.

10. Sea f una función tal que $D_f = [0,1]$. Encuentre el dominio de $g(x) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}\right)$.

11. Supón que $D_f = (0,2]$ y que $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)$. Determine el dominio de g.

12. Sean f y g funciones reales de variable real definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$. Determine el dominio de la función $g \circ f$ y su expresión analítica.

13. Siendo f y g funciones reales de variable real definidas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$ caracterice la función $f \circ g$.

14. Considere las funciones f y g definidas por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

   (a) Determine el dominio de las funciones f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$.
   (b) Estudie la paridad de las funciones f y g.
   (c) Demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
   (d) De los incisos (a) y (c) resulta que $f \circ g = g \circ f$. Sin embargo, este resultado no es, en general, verdadero. Dar un ejemplo de funciones f y g para las cuales $f \circ g \neq g \circ f$.

15. Siendo f, g y h definidas, respectivamente, por $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$, determine los dominios y las expresiones analíticas de $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ f$ y $f \circ h$.

16. Sean f la función definida en $[1, +\infty)$ por $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ y g la función definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Justifique que f es acotada y que g no es acotada.

17. En cada uno de los siguientes incisos, determine para la función considerada, el dominio, el conjunto imagen y averigüe si son biyectivas.

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
   (c) $f(x) = x^2 + x$