CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 15
Otoño 2019
Series de potencias. Series de Taylor

1. Encuentra el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{\pi^{n+2}}\, x^{n+3}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x+2)^n}{4^n(2n)}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n\,(x-1)^n\,.$

2. Considera la serie potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+a)^{n+1}}$, con $a > 0$. Determina a de modo que el radio de convergencia de la serie sea igual 3.

3. (a) Determina el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}.$

   (b) Utilizando el inciso anterior, calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n)!}.$

4. Determina el valor exacto de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n.$

   Sugerencia: Deriva término a término la serie

   $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

5. Demuestra que $\displaystyle\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

   Sugerencia: Usa $\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ e integra término a término la serie de potencias de $\dfrac{1}{1+t^2}$.

6. La serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. A partir de esta información:

   (a) Calcula $1 + \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} + \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \dfrac{(\ln 2)^4}{4!} + \ldots$

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $g(x) = e^{-2x^2}$ en $x_0 = 0$.

   (c) Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1$, con $\lambda > 0$ una constante.

7. La serie de Taylor generada por $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. A partir de esta información:

   (a) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en $x_0 = 0$.

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = x \ln(1 + x^2)$ en $x_0 = 0$.

8. ¿Qué función tiene como serie de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n$? ¿Para qué valores de x es válido este desarrollo?

9. Considera la integral $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2) dx$.

   (a) Expresa la integral como una serie infinita.

   (b) Determina el valor de la integral con un error menor que 10^{-4}.