

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 13

Otoño 2019

Sucesiones. Propiedades de convergencia de sucesiones

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

(a) $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

(b) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$.

(c) $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

(d) $a_n = nr^n$, si $|r| < 1$ es fijo.

(e) $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$.

(f) $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$.

(g) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

(h) $a_n = (\ln n)^{1/n}$. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

(i) $a_n = (p(n))^{1/n}$, en donde $p(x) = b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m$ es un polinomio de grado m y b_0, b_1, \dots, b_m , son reales positivos fijos.

2. Usa la prueba del cociente o la prueba de la raíz n -ésima para sucesiones (enunciadas al final de este laboratorio) para estudiar la naturaleza de las siguientes sucesiones $\{a_n\}$:

(a) $a_n = n^5 e^{-n}$.

(b) $a_n = \frac{5^n}{n!}$.

(c) $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

(d) $a_n = \frac{n!n!}{(2n)!}$.

3. Demuestra que:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$, $a, b > 0$.

4. Sea $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Demuestra que $I_n = (-1)^n n!$
Sugerencia: integra por partes y calcula la integral impropia usando la regla de L'Hopital.
5. Demuestra que toda sucesión convergente está acotada.
6. Prueba rigurosamente (ε y N) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{1 + n^2} = 4.$$

Prueba del cociente para sucesiones. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de reales positivos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ y si $0 \leq L < 1$, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Prueba de la raíz n-ésima para sucesiones. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de reales no negativos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ y si $0 \leq L < 1$, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.