CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 8
Otoño 2019
Integración por partes. Integrales trigonométricas

1. Encuentra las siguientes integrales:

   (a) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$.

   (b) $\int e^{\sqrt{x}} dx$. (Primero haz una sustitución y luego integra por partes.)

   (c) $\int \operatorname{sen}^{-1}(3x)\, dx$.

   (d) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$.

   (e) $\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\, dx$.

2. Utilizando una integración por partes demuestra las siguientes fórmulas de reducción de grado:

   (a)
   $$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, dx, \text{ con } a \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   (b)
   $$\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. Demuestra que
   $$\int_a^b \int_x^b f(t)dtdx = \int_a^b (x-a)\, f(x)dx.$$

4. (a) Demuestra que
   $$\int f^{-1}(x)\, dx = x f^{-1}(x) - \int f(y)dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x).$$

   (b) Utilizando el inciso anterior, determina: (i) $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x)dx$, (ii) $\int \log_2(x)dx$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, tal que
   $$f''(x) = -\frac{3}{x^4} \cosh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^5} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$$
   para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(1) = \cosh(1)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Demuestra que
   $$f(x) = -\frac{1}{x} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right) + \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

6. Usando la sustitución $u = \sec(x)$ demuestra que

$$\int \sec(x) dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C.$$

7. Encuentra las siguientes integrales:

   (a) $\int \operatorname{sen}^5(x)\ dx$.

   (b) $\int \operatorname{senh}^3(x) \cosh^2(x)\ dx$.

   (c) $\int \tan^5(x) \sec^4(x)\ dx$.

   (d) $\int \tan^3(x) \sec^5(x)\ dx$.

   (e) $\int \sec^3(x) dx$.

   (f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3(x)\, dx$.

   (g) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\dfrac{1 - \cos(x)}{2}}\, dx$.

8. Demuestra que para $m, n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0$.

   (b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$