Cálculo Diferencial e Integral I

Laboratorio 8 - El Teorema del Valor Medio de Lagrange

Otoño 2019 - ITAM

1. Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Si $f'(c) \neq 0 \quad \forall c \in (a, b)$ entonces:

   a) Si $f(a)f(b) < 0$ entonces f tiene una única raíz en (a, b).

   b) Si $f(a) < f(b)$ entonces f es creciente en $[a, b]$.

2. Supón que f es continua en $[0, 1]$, diferenciable en $(0, 1)$, $f(0) = 1$ y que $\mid f'(c) \mid \leq 2 \quad \forall c \in (0, 1)$. Pruebe que:

$$1 - 2x \leq f(x) \leq 1 + 2x \quad \forall x \in [0, 1]$$

   .

3. Prueba que $\mid cos(x) - 1 \mid \leq \mid x \mid \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
   (Sugerencia: Usa el TVM en $[0, x]$ si $x > 0$ y en $[x, 0]$ si $x < 0$)

4. a) Usa es TVM, la función y el intevalo adecuado para probar que:

$$\frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad \text{si} \quad 0 < a < b$$

   .

   b) Elige a y b adecuados en el inciso anterior para probar que:

$$4 + \frac{1}{5} < \sqrt{18} < 4 + \frac{1}{4}$$

5. Prueba que:

$$\mid tan(a) \pm tan(b) \mid \geq \mid a \pm b \mid \quad \forall a, b \in (-\pi/2, \pi/2)$$

6. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - \mid x \mid}$.
   Prueba que $f(-1) = 0 = f(1)$ y que <u>no</u> existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Se contradice el Teorema de Rolle?