CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 7
Otoño 2019
Formas indeterminadas

1. Sin utilizar la regla de L'Hopital prueba que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(x)}{x}=1 \quad \text{(cambia variable)}.$$

2. Sin utilizar la regla de L'Hopital encuentra los siguientes límites:

   (a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2.8)^h-1}{h}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}\int_1^x e^{-t^2}\,dt$.

   Ayuda: Usa la definición de derivada.

3. Calcula, si existen, los siguientes límites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+x^2/2}{x^3}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{a\to 1}\frac{x^{1-a}-1}{1-a}$, $x>0$.

   (d) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}$.

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{(-1/x^2)}}{x}$.

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+4^x}{5^x-2^x}$.

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$.

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[\ln(1+6x)-\ln(4+3x)\right]$.

   (i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x}\left[\pi-2\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]\right)$.

   (j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln(3e^x+1)\right)$.

   (k) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$, $\quad a>0, b>0$.

   (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}(x))^{\cot(x)}$.

4. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que F es continua en el punto $x = 0$.

(b) ¿En qué condiciones se puede garantizar que F es diferenciable en el punto $x = 0$?

5. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 \operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right), & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 + \tan^{-1}(x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

en donde α_1 y α_2 son constantes reales. Determina α_1 y α_2 de modo que la función f sea continua y diferenciable en $\mathbb{R}$.

6. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \int_0^{1/x} f(t)dt\right)^x = e^{f(0)}.$$