CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 6
Otoño 2019
Funciones trigonométricas inversas

1. Prueba que
$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right), \quad \text{si } 0 < |x| \leq 1.$$
Sugerencia: Dibuja un triángulo o deriva ambos lados de la igualdad.

2. (a) Prueba que
$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh}(x)) + C.$$
Sugerencia: $\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \int \dfrac{1}{\cosh(x)}\, dx = \int \dfrac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)}\, dx.$

   (b) Prueba también que
$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh(x)) + C. \quad \text{(Derivar.)}$$

3. Sean $a, b > 0$. Haciendo la sustitución $u = \tan x$ determina
$$\int \frac{1}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx.$$

4. Sea
$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\, dt, \quad \text{con } x > 0.$$
   (a) Sin resolver la integral, demuestra que f es constante.
   (b) Resolviendo la integral, demuestra que la constante es $\pi/2$. Sugerencia: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(1/x)$.

5. Considera la función definida por $f(x) = -\pi + \cos^{-1}(1 - \ln x)$.
   (a) Determina: (i) el dominio de f, (ii) la imagen de f, (iii) los ceros de f, (iv) las soluciones de la ecuación $f(x) = -\pi$.
   (b) Demuestra que f es inyectiva.
   (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).
   (d) Esboza la gráfica de f.

6. Simplifica la expresión $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\right)$.

7. Determina el dominio de la función en cada inciso, y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = \cot^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

   (b) $f(x) = \sec^{-1}(\ln x)$.

   (c) $f(x) = 3\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x^2-1})$.

8. Calcula las siguientes integrales:

   (a) $\int_{4\sqrt{3}/3}^{4} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

   (b) $\int_{-2}^{2\sqrt{3}-2} \dfrac{dx}{x^2+4x+8}$.

   (c) $\int_{-b}^{-b/2} \dfrac{dx}{\sqrt{-2bx-x^2}}$, $b > 0$.

   (d) $\int_{1}^{e} \dfrac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

   (e) $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \dfrac{\cos\left(\sec^{-1} x\right)\, dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

9. Determina la primitiva de la función $f(x) = \sec(x)$, efectuando el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$. (Sugerencia: Integra usando la sustitución indicada y luego utiliza el ejercicio 7 del laboratorio 5.)