

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Laboratorio 5

Otoño 2019

Funciones hiperbólicas y sus inversas

1. Demuestra que para todo  $x$ :

(a)  $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ .

(b)  $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ .

2. Determina las siguientes integrales:

(a)  $\int 6 \cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) dx$ .

(b)  $\int_0^{\ln 10} 4 \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ .

(c)  $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1 + \cosh(x)} dx$ . (Sugerencia: desarrolla  $\cosh(x) = \cosh\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$ .)

3. Sean

$$A(\theta) = \frac{1}{2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \int_{\cos(\theta)}^1 \sqrt{1-t^2} dt, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

y

$$B(x) = \frac{1}{2} \sinh(x) \cosh(x) - \int_1^{\cosh(x)} \sqrt{s^2-1} ds, \quad x \geq 0.$$

Prueba que  $A(\theta) = \frac{\theta}{2}$  para todo  $\theta$  y  $B(x) = \frac{x}{2}$  para todo  $x$ . (Sugerencia:

$A'(\theta) = \frac{1}{2}$  y  $B'(x) = \frac{1}{2}$  por la regla de Leibniz.)

4. Caracteriza la función inversa del coseno hiperbólico y demuestra que:

(a)  $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ .

(b)  $(\cosh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ .

5. Determina la derivada de las siguientes funciones:

(a)  $y = \cosh^{-1}(2\sqrt{x+1})$ .

(b)  $y = \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^\theta$ .

6. Las funciones  $\tanh^{-1}(x)$  y  $\operatorname{coth}^{-1}(x)$  tienen la misma derivada,  $\frac{1}{1-x^2}$ .  
¿Por qué no difieren en una constante?

7. Demuestra que

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

8. Determina la primitiva de la función  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ , efectuando el cambio de variable  $x = \cosh(t)$ .

9. Calcula las siguientes integrales y escribe tu respuesta en términos del logaritmo natural:

(a)  $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ .

(b)  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$ .