CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 4
Otoño 2019
Función exponencial. Logaritmos y exponenciales en otras bases.

1. Prueba que si $x > 0$ y $x^{(x)^x} = (x^x)^x$, entonces $x = 1$ o $x = 2$.

2. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + 2k - \dfrac{1}{2}, & \text{si } x > 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \\ \left(k^2 + \dfrac{k}{2}\right) \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Determina k de modo que f sea continua en $x = 0$.
   (b) Demuestra que para todo $x > 0$, $e^{-1/x^2} \in (0, 1)$.
   (c) Para $k = 1/2$ define la inversa de la restricción de f a $\mathbb{R}^+$.

3. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - \alpha| e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}$, en donde α es una constante real.

   (a) Determina el dominio de diferenciabilidad de f y calcula f'.
   (b) Estudia la monotonía y extremos relativos de f.
   (c) Indica, justificando, si f admite máximos y mínimos absolutos.
   (d) Justifica que f restringida al intervalo $(\alpha+1, \infty)$ es invertible e indica el dominio de la respectiva función inversa. Calcula la derivada de la función inversa en el punto $f(\alpha + 2)$.

4. Sea $f > 0$ una función continua en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y diferenciable en (a, b). Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

5. Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $y = \dfrac{1}{e^{2x}} + \ln\left(\dfrac{1}{e^{2x} + 1}\right)$.
   (b) $y = \log_3\left(\dfrac{3^x}{3^x + 1}\right)$.
   (c) $y = (2^x + 1)^{1/x}$, $x > 0$.
   (d) $y = x^x (\ln x)^{\ln x}$, $x > 1$.

6. Sea $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

   (a) Encuentra el dominio de f.

   (b) Encuentra $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to(-\infty)} f(x)$.

   (c) Determina f', f'', intervalos de crecimiento y decrecimiento, posibles valores extremos y puntos de inflexión, y luego esboza la gráfica de la función f, indicando las asíntotas.

7. Sea $f(x) = 6/\left(1 + 2e^{-x}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Prueba que
   $$f'(x) = \frac{12e^{-x}}{\left(1+2e^{-x}\right)^2}.$$

   (b) Prueba que
   $$f''(x) = \frac{12e^{-x}(-1+2e^{-x})}{\left(1+2e^{-x}\right)^3}.$$

   (c) Esboza la gráfica de la función f, indicando el punto de inflexión y las asíntotas. Esta curva se conoce como la curva logística.

8. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si
$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

9. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\int_{1/10}^{10} \dfrac{\log_{10}(x)}{x}dx$. Simplifica la respuesta.

   (b) $\int \dfrac{\sqrt{2^{\tan x}}}{\cos^2 x}dx$.

   (c) $\int_0^{\ln 2} \dfrac{1}{1+e^x}dx$.

10. En cada una de las siguientes expresiones despeja y:

   (a) $\log_3(1-y) - \log_3(y) - x = 0, \quad 0 < y < 1.$

   (b) $2^{-\log_2 y} = 5e^{-\ln y} - 4^{\log_2 3}, \quad y > 0.$

   (c) $\dfrac{5^y - 5^{-y}}{2} = 3.$