CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 3
Otoño 2019
Integral por sustitución. La función logaritmo natural. Funciones inversas.

1. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}-2x}$.

   (b) $\int \dfrac{x}{x+1}\,dx$.

   (c) $\int x^5\sqrt{x^2-1}\,dx$.

   (d) $\int \dfrac{x}{1+x\tan x}\,dx$. Sugerencia: Usa la sustitución $u = x\operatorname{sen} x + \cos x$.

2. Calcula las siguientes integrales, usando el método de sustitución para integrales definidas:

   (a) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}|\pi-2x|\ dx$.

   (b) $\int\limits_{0}^{x} \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}\,dt$, con $x \geq 0$.

   (c) $\int_e^{e^2} \dfrac{dx}{x\ln x}$. (Observa que $\ln e = 1$.)

   (d) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{5\operatorname{sen} x\ \cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)^2}\,dx$.

3. A partir de la gráfica de $y = \ln x$ bosqueja la gráfica de:

   (a) $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

   (b) $y = \ln(1/x)$.

   (c) $y = \ln|x|$.

   (d) $y = |\ln x|$.

4. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = (\ln x)\ln(\operatorname{sen} x)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} + \ln(1/x)$.

   (c) $f(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x\ln x}$.

   (d) $f(x) = \ln^2\left(\dfrac{3x+2}{x^4}\right)$.

5. Utiliza derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2+1)^{5/2}\sqrt{2+\operatorname{sen} x}}.$$

6. Utiliza derivación implícita para calcular dy/dx, si $y = \ln(xy^2)$.

7. Sea $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

y

$$\lim_{t \to 0} \frac{L(1+t)}{t} = 1. \quad (*)$$

Prueba que $L(x) = \ln x$, para todo $x > 0$. (Sugerencia: Prueba que $L(1) = 0$ y usa (*) para demostrar que $L'(x) = 1/x$.)

8. (a) Prueba que si $t \geq 1$, entonces $\dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

(b) Concluye que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. (Usa el teorema del sandwich).

9. En cada inciso, encuentra un intervalo en el que f tenga una inversa (halla un intervalo en el que $f' > 0$ o $f' < 0$). No es necesario encontrar f^{-1}.

(a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

(b) $f(x) = \int_{x^2}^{x} \ln t \, dt, \ 0 < x < 1$.

10. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

(a) Muestra que f es creciente y diferenciable en $\mathbb{R}$.

(b) Calcula $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(9)$. (Observa que $f(2) = 9$.)