Cálculo Diferencial e Integral I

Laboratorio 4 - Continuidad y el TVI

Otoño 2019 - ITAM

1. Sea
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
Prueba formalmente (ϵ, δ) que f es continua en $x_0 = 1$.

2. Prueba (ϵ, δ) que si g es continua en L y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ entonces:
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(L)$$

3. Prueba que la ecuación
$$(x-2)^{2019} + (x+2)^{2019} = 2019$$
tiene al menos una solución.

4. Prueba que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(c) \neq 0 \quad \forall c \in [a, b]$, entonces $f(\alpha)f(\beta) > 0 \quad \forall \alpha, \beta \in [a, b]$.

5. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua. Prueba:
   a) $\exists \quad c_1 \in [0, 1] \quad$ tal que $\quad f(c_1^2) = f(1 - c_1)$.
   b) $\exists \quad c_2 \in [0, 1] \quad$ tal que $\quad f(\sqrt{c_2}) = f(1 - c_2^3)$.

6. Sea
$$f(x) = \mathrm{A}\sin(x) + \mathrm{B}\cos(x) \quad \text{con } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{y A, B} \in \mathbb{R}$$
Prueba que existe $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que: $f(c) = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$.