

Cálculo Diferencial e Integral I

Laboratorio 3 - Límites (segunda parte)

Otoño 2019 - ITAM

1. Exhibe diversos ejemplos de funciones $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

$$\frac{1}{x} < g(x) < \frac{1}{x^4} \quad \text{si } x < 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{x^4} < g(x) < \frac{1}{x} \quad \text{si } x > 1$$

simultáneamente.

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que:

$$|2f(x) - x^2 - 2| \leq 2x^4 \quad \forall x \neq 0$$

Prueba que:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 0$

c) $f(0) = 1$

3. Supón que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ existe y no es igual a cero y que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

existe. Prueba que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)}$ existe.

4. Prueba que si $|x - 1| < 1$ y $|x - 1| < \varepsilon$, prueba que:

$$\left| \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

5. Prueba rigurosamente (ε, δ) que:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x}{3 + x^2} = 1$$