MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA
CUADERNO DE EJERCICIOS

Dra. Lorena Zogaib
Departamento de Matemáticas
ITAM

Enero 2, 2017

INTRODUCCIÓN

Este documento constituye un material de apoyo para el curso de Matemáticas Aplicadas a la Economía, para las carreras de Economía y Dirección Financiera en el ITAM. Contiene una recopilación de ejercicios y aplicaciones, que complementan el material visto en clase.

Gran parte de estos ejercicios fueron tomados de la bibliografía del curso, así como del material utilizado por otros profesores, muy especialmente de las notas de clase de mi querido colega Guillermo Pastor. La secuencia de los temas obedece al orden del temario vigente, por lo que se espera que el estudiante avance en las tareas a medida que se vaya cubriendo en clase el material correspondiente.

Con el fin de que el estudiante pueda verificar sus resultados, pongo a su disposición mis soluciones a estos ejercicios, que están publicadas en el documento de trabajo *Matemáticas Aplicadas a la Economía, Cuaderno de Ejercicios, Soluciones,* Lorena Zogaib, Departamento de Matemáticas, ITAM, enero 2 de 2017. Recomiendo ampliamente no consultar las soluciones antes de haber intentado resolver los ejercicios.

Para la elaboración de este documento conté con la colaboración de Carlos Gómez Figueroa, quien es estudiante de las carreras de Matemáticas Aplicadas y Actuaría en el ITAM. Carlos realizó una transcripción del texto en Word a su versión actual en Scientific WorkPlace.

Agradezco de antemano sus comentarios y correcciones en relación con este material.

Lorena Zogaib

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA
TAREA 1
ECUACIONES EN DIFERENCIAS I
(Temas 1.1-1.3)

1. Clasifica las siguientes ecuaciones de primer orden (autónoma o no autónoma, lineal o no lineal, homogénea o no homogénea):

   (a) $x_{t+1} = \sqrt{3t}\, x_t$

   (b) $x_{t+1}(1 - x_t) = x_t$

   (c) $x_t - 3x_{t-1} + 4 = 0$

2. En cada inciso verifica, por medio de sustitución, que la función dada es una solución a la ecuación en diferencias correspondiente:

   (a) $x_{t+1} = 3x_t - 4; \quad x_t = 3^{t+1} + 2$

   (b) $z_t - z_{t-1} = 2t; \quad z_t = t^2 + t$

   (c) $a_{t+1}^2 = 5a_t^2; \quad a_t = 2(5)^{t/2}$

3. En cada inciso escribe una ecuación en diferencias lineal que sea un modelo matemático de la situación que se describe, y luego resuélvela:

   (a) La población P_t de una colonia de bacterias se duplica cada período.

   (b) El cambio $K_{t+1} - K_t$ en el capital entre los períodos t y $t+1$ es igual a una fracción $r > 0$ del capital en el período t (interés compuesto).

   (c) El cambio $K_{t+1} - K_t$ en el capital entre los períodos t y $t+1$ es igual a una fracción $r > 0$ del capital inicial, K_0 (interés simple).

   (d) El cambio $I_t - I_{t-1}$ en la inversión entre los períodos $t - 1$ y t es igual a una fracción $r > 0$ de la inversión en el período $t - 1$ más una cantidad fija $d > 0$ de dividendos.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones autónomas y analiza la estabilidad del sistema. En cada caso, grafica la función x_t:

   (a) $x_{t+1} = -(1/2)\, x_t + 3$, $x_0 = 3$

   (b) $2x_{t+1} - 3x_t - 4 = 0$, $x_0 = 0$

(c) $x_{t+1} - x_t = (1/2)\, x_t + 2,\ x_0 = 0$

(d) $x_{t+1} = -x_t + 5,\ x_0 = 5$

(e) $x_{t+1} = -x_t + 5,\ x_0 = \dfrac{5}{2}$

(f) $x_{t+1} = x_t + 2,\ x_0 = \dfrac{5}{2}$

5. El precio p_t del oro en un país en cada período t satisface la ecuación

$$p_t - p_{t-1} = \beta\left(\phi - p_t\right),$$

donde ϕ es el precio acordado con sus socios comerciales y $\beta > 0$.

(a) ¿Cuál es el precio de equilibrio del oro en esa economía?

(b) Encuentra el precio p_t para $t = 0, 1, 2, \ldots$, suponiendo p_0 dado.

(c) Supón que el precio inicial p_0 no es igual al precio de equilibrio. ¿El precio convergerá hacia el precio de equilibrio o divergerá de él? ¿El precio se moverá de una manera alternante o monótona?

6. Sean Y_t el ingreso nacional, I_t la inversión total y S_t el ahorro total en el período t. Suponiendo que el ahorro es proporcional al ingreso nacional, la inversión es proporcional al cambio en el ingreso del período t al $t+1$ y que el ahorro es igual a la inversión, se tiene

$$S_t = \alpha Y_t, \quad I_{t+1} = \beta\left(Y_{t+1} - Y_t\right), \quad S_t = I_t,$$

en donde α y β son constantes tales que $0 < \alpha < \beta$. Deduce una ecuación de primer orden para el ingreso Y_t, dado Y_0, y resuélvela. Analiza la convergencia del modelo.

7. Considera el modelo del multiplicador keynesiano, dado por

$$Y_t = C_t + I_t + G_t, \quad C_t = C_0 + \alpha Y_{t-1},$$

en donde Y_t, C_t, I_t y G_t denotan, respectivamente, el ingreso, el consumo, la inversión y el gasto gubernamental agregados en el período t. Adicionalmente, C_0 es una cantidad fija de consumo, independiente del ingreso, y $0 < \alpha < 1$ es la propensión marginal a consumir. Deduce una ecuación de primer orden para el ingreso Y_t, dado Y_0, y resuélvela suponiendo que la inversión y el gasto gubernamental son constantes, esto es, $I_t = I$, $G_t = G$. Analiza la convergencia del modelo.

8. Deduce las siguientes fórmulas, en donde β es una constante:

   (a) $\sum_{k=0}^{n} \beta^k = \dfrac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}$, $\beta \neq 1$ (suma geométrica)

   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \dfrac{1}{1-\beta}$, $|\beta| < 1$ (serie geométrica)

9. Resuelve las siguientes ecuaciones no autónomas usando el método de iteración (encuentra los primeros términos $x_1, x_2, x_3, \ldots$e infiere la solución x_t, para todo $t = 0, 1, 2, \ldots$):

   (a) $x_t = t x_{t-1}$, $x_0 = 1$.

   (b) $x_t = \dfrac{x_{t-1}}{t+2}$, x_0 dado

   (c) $x_{t+1} = a x_t + b^t$, x_0 dado ($a, b > 0$ son constantes).

   (d) $x_{t+1} = a^t x_t + b$, x_0 dado ($a, b > 0$ son constantes).

10. Resuelve las siguientes ecuaciones no autónomas usando el método de iteración. Luego determina $\lim_{t\to\infty} x_t$.

    (a) $x_{t+1} = \dfrac{1}{2} x_t + \left(\dfrac{1}{4}\right)^t$, x_0 dado.

    (b) $x_{t+1} = \dfrac{1}{2} x_t + \left(\dfrac{1}{2}\right)^t$, x_0 dado.

11. Resuelve la ecuación no autónoma para w_t,

$$w_{t+1} = (1+r)\, w_t - c_t, \quad c_t = c_0 \gamma^t,$$

    con condición inicial w_0, en donde $r, c_0, \gamma > 0$.

12. Para los siguientes sistemas de oferta y demanda encuentra el precio de equilibrio p^*. Realiza el diagrama de fase y determina el tipo de equilibrio que se tiene:

    (a) $D_t = -3p_t + 10, \quad S_t = p_{t-1} + 2$

    (b) $D_t = -4p_t + 25, \quad S_t = 4p_{t-1} + 3$

    (c) $D_t = -(5/2)\, p_t + 45, \quad S_t = (15/2)\, p_{t-1} + 5$

13. En un modelo de depreciación lineal el precio p_t de un bien satisface la ecuación

$$p_{t+1} = p_t - d, \quad d > 0.$$

(a) Realiza el diagrama de fase, partiendo de un precio inicial $p_0 > 0$.

(b) Resuelve la ecuación y grafica la solución obtenida. ¿En qué tiempo t^* el precio del bien es igual a 0?

14. Considera la ecuación para el crecimiento de una población, x_t,

$$x_{t+1} = \frac{kx_t}{b + x_t}, \quad k, b > 0.$$

(a) ¿Tiene esta ecuación un estado estacionario?

(b) De ser así, analiza la estabilidad.

15. Considera la ecuación

$$y_{t+1}\,(a + by_t) = cy_t,$$

en donde $a, b, c > 0$ son constantes y $y_0 > 0$.

(a) Muestra que $y_t > 0$ para todo t.

(b) Muestra que con la sustitución $x_t = 1/y_t$ la nueva ecuación para x_t es lineal. Usa este hecho para resolver la ecuación $y_{t+1}\,(2 + 3y_t) = 4y_t$, con $y_0 = 1/2$. ¿Cuál es el límite de y_t cuando $t \to \infty$?

16. Realiza el diagrama de fase, y determina los puntos fijos y tipos de equilibrio de cada una de las siguientes ecuaciones no lineales:

(a) $x_{t+1} = \sqrt{4x_t - 3}, \ \ x_t \geq \dfrac{3}{4}$

(b) $x_{t+1} = x_t^3$

(c) $x_{t+1} = \dfrac{1}{x_t^2}, \quad x_t > 0$

(d) $x_{t+1} = \dfrac{1}{x_t}, \quad x_t > 0$

(e) $x_{t+1} = x_t + x_t^3$

(f) $x_{t+1} = e^{(x_t)-1}$. Nota: el punto fijo es $x^* = 1$

17. Usando el método de iteración, determina cuáles de las ecuaciones del problema 16 poseen una solución simple y escribe dicha solución.

18. (a) Para $x_{t+1} = x_t^2 + c$ encuentra los puntos fijos para todos los valores de c. Muestra el diagrama de fase en cada caso.

    (b) Para $x_{t+1} = x_t^2 - 2$ realiza el diagrama de fase y dibuja la órbita $\text{orb}(x_0)$ a partir de $x_0 = \sqrt{2}$.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA
TAREA 2
ECUACIONES EN DIFERENCIAS II
(Tema 2.1)

1. En cada inciso verifica, por medio de sustitución, que la función dada es una solución a la ecuación en diferencias correspondiente:

   (a) $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0; \quad x_t = A + B\,2^t$

   (b) $x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 0; \quad x_t = A + Bt$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden y analiza la estabilidad del sistema:

   (a) $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 0$

   (b) $x_{t+2} - x_t = 0$

   (c) $x_{t+2} - 2x_{t+1} + 4x_t = 0$

   (d) $9x_{t+2} - 6x_{t+1} + x_t = 0,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden:

   (a) $x_{t+2} + \dfrac{1}{4}x_t = 5$

   (b) $x_{t+2} - 4x_t = 3,\ x_0 = 2,\ x_1 = 1$

   (c) $x_{t+2} - 4x_t = -9t,\ x_0 = 2,\ x_1 = 1$

   (d) $x_{t+2} - 7x_{t+1} + 12x_t = 5\left(2^t\right),\ x_0 = \dfrac{1}{2},\ x_1 = 0$

   (e) $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 3\left(5^t\right)$

   (f) $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 1$

   (g) $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 6(2)^t$

   (h) $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 8 + 3\left(2^t\right)$

4. Encuentra la solución a las siguientes ecuaciones lineales de primer orden, usando el teorema $x_t = x_t^{(h)} + x_t^{(p)}$:

   (a) $x_{t+1} + 4x_t = 10,\ x_0 = 5.$

   (b) $x_{t+1} = 2x_t + 9\left(5^t\right),\ x_0 = 3.$

5. Resuelve la ecuación lineal homogénea de tercer orden, dada por $x_{t+3} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0.$

6. Considera la ecuación $2x_{t+2} - 5x_{t+1} + 2x_t = -6$, con $x_0 = 4$ y $x_1 = \beta$, donde β es una constante.

   (a) Identifica el punto fijo x^*.

   (b) Resuelve la ecuación, para las condiciones iniciales dadas.

   (c) Determina para qué valores de β el punto fijo x^* es asintóticamente estable, esto es, $\lim_{t\to\infty} x_t = x^*$.

   (d) Determina para qué valores de β el punto fijo x^* es asintóticamente inestable, esto es, $\lim_{t\to-\infty} x_t = x^*$.

7. Considera la ecuación $x_{t+2} - ax_{t+1} + \frac{1}{16}x_t = 0$, donde a es una constante. Determina para qué valores de a la solución x_t es oscilatoria (senos y cosenos) y proporciona dicha solución.

8. Una pareja de conejos comienza a procrear a la edad de un mes y a partir de ese momento tiene como descendencia una nueva pareja de conejos cada mes. Si ninguna pareja muere, el número de parejas F_t al inicio de cada período t satisface

$$F_{t+2} = F_{t+1} + F_t, \qquad F_0 = 0, \quad F_1 = 1.$$

   Halla F_t para las condiciones iniciales dadas (sucesión de Fibonacci).

9. En un modelo debido a R.J. Ball y E. Smolensky se satisfacen las ecuaciones

$$C_t = cY_{t-1}, \quad K_t = \sigma Y_{t-1}, \quad Y_t = C_t + K_t - K_{t-1},$$

   en donde C_t, K_t y Y_t denotan, respectivamente, el consumo, el capital y el producto nacional neto en el período t, mientras que c y σ son constantes positivas tales que $(c+\sigma)^2 > 4\sigma$. Deduce una ecuación de segundo orden para el ingreso Y_t y luego encuentra su solución general en los casos: i) $(c+\sigma)^2 > 4\sigma$, ii) $(c+\sigma)^2 = 4\sigma$ y iii) $(c+\sigma)^2 < 4\sigma$.

10. En un modelo similar al del multiplicador keynesiano se satisface

$$Y_t = C_t + I_t + G_t, \quad C_t = C_0 + \alpha Y_{t-1}, \quad I_t = I_0 + \beta\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right),$$

   en donde Y_t, C_t, I_t y G_t denotan, respectivamente, el ingreso, el consumo, la inversión y el gasto gubernamental agregados en el período t. Adicionalmente, $C_0, I_0, \beta > 0$ y $0 < \alpha < 1$ son constantes, con $(\alpha+\beta)^2 > 4\beta$. Deduce una ecuación de segundo orden para el ingreso Y_t y luego encuentra su solución general, suponiendo que el gasto gubernamental es constante, esto es, $G_t = G$.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA
TAREA 3
ELEMENTOS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA
(Temas 3.1-3.3)

1. Deduce las siguientes fórmulas, en donde β es una constante:

   (a) $\sum_{k=0}^{n} k\beta^k = \dfrac{\beta\left[1-(n+1)\beta^n + n\beta^{n+1}\right]}{(1-\beta)^2}$, $\beta \neq 1$
   Sugerencia: Deriva con respecto a β ambos lados de la suma geométrica $\sum_{k=0}^{n} \beta^k = \dfrac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}$.

   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} k\beta^k = \dfrac{\beta}{(1-\beta)^2}$, $|\beta| < 1$ (serie aritmético-geométrica)

2. Pompeyo desea comer un pastel en T períodos. Su función de utilidad es $\ln c_t$, con un factor de descuento sicológico $0 < \beta < 1$. Sea w_t la cantidad de pastel en el período t, con $w_0 = \phi$ la cantidad inicial. Su problema de maximización de utilidad es

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{k=0}^{T} \beta^k \ \ln c_k \quad \text{s.a.} \quad w_{t+1} = w_t - c_t, \quad w_0 = \phi \ \text{ y } \ w_T = 0.$$

   Da la ecuación de Bellman, las condiciones de primer orden y la ecuación de Euler para este problema. Encuentra las trayectorias óptimas de consumo y cantidad de pastel.

3. El señor y la señora Godínez tienen una cantidad inicial de riqueza w_0. Cada año, la pareja consume parte de su riqueza e invierte la restante a una tasa constante $r > 0$. La función de utilidad de la familia es $u(c_t)$, con un factor de descuento $0 < \beta < 1$ tal que $\beta(1+r) < 1$. Ellos tienen descendencia (hijos, nietos,...), por lo que deciden planear con base en un horizonte temporal infinito. De esta manera, el problema a resolver es

$$V_0(w_0) = \max_{\{c_t\}} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \ u(c_k) \text{ s.a. } w_{t+1} = (1+r)(w_t - c_t), \ w_0 \text{ dado.}$$

   Da la ecuación de Bellman, las condiciones de primer orden y encuentra la ecuación de Euler correspondiente.

4. Sea $u(c_t) = c_t^{\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$, la función de utilidad de la familia Godínez del problema 3. Encuentra las funciones w_t y c_t que maximizan su función valor. Luego encuentra explícitamente la función valor $V_0(w_0)$ en el caso $\alpha = 1/2$.

5. Sea $u\,(c_t) = \ln c_t$ la función de utilidad de la familia Godínez del problema 3. Encuentra las funciones w_t y c_t que maximizan su función valor. Luego encuentra explícitamente la función valor $V_0(w_0)$ (usa el resultado del ejercicio 1b).

6. Sea $u\,(c_t) = 1 - \dfrac{e^{-ac_t}}{a}$, con $a > 0$, la función de utilidad de la familia Godínez del problema 3. Encuentra la trayectoria de consumo c_t que maximiza su función valor, en términos del consumo inicial c_0 (no resuelvas para w_t).

7. Considera el siguiente problema de maximización de la utilidad $u\,(x_t, c_t) = \ln(x_t - c_t)$, donde $x_t - c_t > 0$, con $x_t, c_t > 0$, y β es una constante tal que $0 < \beta < 1$:

$$V_0(x_0) = \max_{\{c_t\}} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \ln\,(x_k - c_k)$$

$$\text{s.a.} \quad x_{t+1} = c_t, \;\; x_0 \text{ dado}, \;\; \lim_{t\to\infty} c_t = 0.$$

Da la ecuación de Bellman, las condiciones de primer orden y encuentra la ecuación de Euler correspondiente. Encuentra las funciones x_t, c_t, que maximizan V_0. Verifica que tu solución satisface $x_t - c_t > 0$.

8. (Modelo de Ramsey sin depreciación) Considera el siguiente problema de maximización de la utilidad $u\,(c_t) = \ln c_t$, donde $c_t > 0$ y $k_t > 0$ son, respectivamente, el consumo y el capital en el período t, y α y β son constantes tales que $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$:

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \;\ln c_i \quad \text{s.a.} \quad k_{t+1} = k_t^{\alpha} - c_t, \;\; k_0 \text{ dado.}$$

Da la ecuación de Bellman, las condiciones de primer orden y encuentra la ecuación de Euler correspondiente. Por último, encuentra las coordenadas del punto fijo (k^*, c^*). En contraste con los ejercicios anteriores, nota que en este problema no existe una solución simple, ya que la ecuación de restricción es no lineal.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA
TAREA 4
ECUACIONES DIFERENCIALES I
(PRIMERA PARTE)
(Temas 4.1-4.2)

1. En cada inciso verifica, por medio de sustitución, que $x(t)$ satisface la ecuación diferencial dada y luego determina el valor de la constante C tal que $x(t)$ satisfaga la condición inicial:

   (a) $\dot{x} = 3x + 2e^{-t}, \ x(0) = 1; \quad x(t) = Ce^{3t} - \dfrac{1}{2}e^{-t}$

   (b) $\dot{x} + 2tx^2 = 0, \ x(1) = 3; \quad x(t) = \dfrac{1}{t^2 + C}$

   (c) $\dot{x} = 3t^2\left(x^2 + 1\right), \ x(0) = 1; \quad x(t) = \tan\left(t^3 + C\right)$

2. Escribe una ecuación diferencial que sea un modelo matemático de la situación que se describe en cada inciso:

   (a) La aceleración dv/dt de un auto crece proporcionalmente a la diferencia entre 250 km/h y la velocidad v del automóvil.

   (b) En una ciudad, con una población fija de P personas, la tasa de cambio del número $N(t)$ de personas que ha escuchado cierto rumor al tiempo t es proporcional al número de personas que aún no lo han escuchado.

   (c) En una ciudad con una población fija de P personas, la tasa de cambio del número $N(t)$ de personas que han contraído cierta enfermedad contagiosa al tiempo t es proporcional al producto del número de quienes están enfermas y el número de las que no lo están.

3. Usa tu intuición para encontrar (adivinar) al menos una solución $y(x) \neq 0$ de la ecuación diferencial en cada inciso:

   (a) $y'' = 0$

   (b) $y' = 3y$

   (c) $xy' + y = 3x^2$

   (d) $y' + y = e^x$

   (e) $y'' + y = 0$

   (f) $(y')^2 + y^2 = 1$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones autónomas

   (a) $\dot{x} = 2, \quad x(0) = 2$
   (b) $\dot{x} = 5x, \quad x(3) = 2$
   (c) $2\dot{x} + x = 0$
   (d) $\dot{x} = 8 - x, \quad x(0) = 5$
   (e) $\dot{x} = 8 - x, \quad x(0) = 8$
   (f) $\dot{x} - 5x + 10 = 0$

5. El precio$P(t)$ de un bien al tiempo t satisface $\dot{P} = 2\,[D(P) - S(P)]$, en donde $S(P) = P - 4$ es la oferta y $D(P) = 11 - 2P$ es la demanda del bien. Resuelve para $P(t)$, suponiendo que $P(0) = P_0$, y discute el comportamiento de esta función a largo plazo.

6. El problema anterior se generaliza de la siguiente manera. Sea $P(t)$ el precio de un bien al tiempo t, $D(P) = a - bP$ la demanda y $S(P) = \alpha + \beta P$ la oferta, con $a, b, \alpha, \beta > 0$, $a > \alpha$. Supongamos que $\dot{P}$ es proporcional al exceso de demanda $D(P) - S(P)$, es decir, $\dot{P} = \lambda[D(P) - S(P)]$, con $\lambda > 0$. Encuentra el precio $P(t)$ y demuestra que a la larga éste llega a un valor de equilibrio, P^e.

7. En el modelo de Malthus, la población $P(t)$ de individuos al tiempo t crece de acuerdo con $\dot{P} = \alpha P$, con $\alpha > 0$ la tasa de crecimiento de la población.

   (a) Encuentra $P(t)$, suponiendo que $P(0) = P_0$.
   (b) ¿En cuánto tiempo se duplicará la población inicial?
   (c) Determina $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$.
   (d) Si $\alpha < 0$,¿cuál sería el valor de $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$?

8. Ahora considera una población $P(t)$ sujeta a nacimientos y a muertes, de modo que ésta satisface la ecuación $\dot{P} = (\alpha - \beta)P$, con $\alpha > 0$ la tasa de natalidad y $\beta > 0$ la tasa de mortalidad. Encuentra $P(t)$ suponiendo que $P(0) = P_0$. Luego analiza $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$ para los casos $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ y $\alpha < \beta$. Interpreta tus resultados.

9. Otro modelo de poblaciones supone que existe un número fijo $E > 0$ de individuos que emigran cada año, de modo que la población satisface la ecuación $\dot{P} = \alpha P - E$, con $\alpha > 0$ la tasa de crecimiento. Encuentra $P(t)$, suponiendo que $P(0) = P_0$, y analiza $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$ para los casos $E > \alpha P_0$, $E = \alpha P$ y $E < \alpha P_0$. Interpreta tus resultados.

10. El cosumo $C(t)$, la inversión $I(t)$ y la renta nacional $Y(t)$ al tiempo t satisfacen las ecuaciones $C(t) + I(t) = Y(t)$, $I(t) = k\dot{C}(t)$ y $C(t) = aY(t) + b$, en donde $a, b, k \in \mathbb{R}^+$, con $a < 1$. Demuestra que $Y(t)$ satisface la ecuación $\dot{Y} = \dfrac{1-a}{ka}Y - \dfrac{b}{ka}$ y resuélvela para $Y(0) = Y_0 > \dfrac{b}{1-a}$. Luego halla la función $I(t)$ y calcula $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{Y(t)}{I(t)}$.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones no autónomas:

    (a) $\dot{x} = -2t, \;\; x(1) = 3$
    (b) $\dot{x} + (2\cos t)x = \cos t$
    (c) $\dot{x} - 2tx = t(1 + t^2)$
    (d) $2\dot{x} + 12x + 2e^t = 1$
    (e) $\dot{x} + t^2 x = 5t^2, \quad x(0) = 6$
    (f) $\dot{x} = -\dfrac{2x}{t} + \dfrac{1}{t^3}, \quad x(1) = 3$
    (g) $t\dot{x} + 2x = t^{-3}, \quad x(1) = 2$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones no autónomas, decidiendo en cada inciso cuál es la variable independiente y cuál la dependiente:

    (a) $\dot{y} - 2ty = e^{t^2}$
    (b) $\lambda' = -\alpha^2\lambda + 5\alpha^2$
    (c) $x' + (2\cos\theta)x = \cos\theta$
    (d) $\dfrac{dy}{dx} = x + \dfrac{y}{2}$
    (e) $y' + 3u^2 y = u^2, \quad y(0) = 1$
    (f) $\dfrac{dx}{dy} + 2x = e^y, \quad x(0) = 1$
    (g) $xy' + 5y = 7x^2, \quad y(2) = 5$
    (h) $(t^2 + 4)\dot{y} + 3ty = t, \quad y(0) = 1$
    (i) $\dot{x} = x - t, \quad x(0) = x_0$

13. En cierto modelo de crecimiento económico la producción total anual $X(t)$, el acervo de capital $K(t)$ y el flujo anual de ayuda exterior $H(t)$ al tiempo t satisfacen las ecuaciones $X(t) = \sigma K(t)$, $\dot{K}(t) = \alpha X(t) + H(t)$, $H(t) = H_0 e^{\mu t}$, con $\sigma, \alpha, H_0, \mu \in \mathbb{R}^+$. Deduce una ecuación diferencial para $K(t)$ y resuélvela, suponiendo que $K(0) = K_0$ y $\alpha\sigma \neq \mu$.

14. En cada inciso verifica que la función dada es la solución del problema de condiciones iniciales correspondiente:

   (a) $y'(x) = e^{x^2}$, $y(2) = 5$; $\quad y(x) = 5 + \int\limits_2^x e^{s^2} ds$

   (b) $y'(x) + 2xy(x) = 1$, $y(2) = 0$; $\quad y(x) = e^{-x^2} \int\limits_2^x e^{s^2} ds$

   (c) $\dot{B}(t) = r(t)B(t)$, $B(0) = B_0$; $\quad B(t) = B_0 \; e^{\int_0^t r(s)ds}$

15. Resuelve el siguiente problema de valores iniciales (la solución es una integral definida con límite variable):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{t} = \frac{sen\, t}{t^3}, \quad x(2) = 3, \quad t \geq 2$$

16. Halla la solución a la siguiente ecuación con condición inicial, en donde $G(x)$ es una función continua arbitraria:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = G(x), \quad y(3) = 6, \quad x \geq 3.$$

17. Expresa la solución de $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2xy$, $y(0) = 3$, en términos de la función error $\text{erf}(x)$, dada por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

18. Halla la solución a la siguiente ecuación con condición inicial, en donde $p(t)$ es el índice de precios, $m(t)$ es la oferta monetaria (función desconocida de t) y $\lambda > 0$ es una constante:

$$\dot{p} = \frac{1}{\lambda} p - \frac{1}{\lambda} m(t), \quad p(t_0) = p_0, \quad t \geq t_0$$

19. Sea $r > 0$ constante. La ecuación $\dot{Y} = rY - X(t)$, $Y(T) = Y_T$, relaciona el valor $Y(t)$ de una inversión al tiempo t con los flujos $X(t)$ de dicha inversión en el período $0 \leq t \leq T$.

   (a) Demuestra que el factor de integración correspondiente es $\mu(t) = e^{-r(t-T)}$.

(b) Utiliza el inciso anterior para demostrar que la solución en el período $[0, T]$ es

$$Y(t) = e^{r(t-T)}Y_T + \int_t^T e^{-r(s-t)}X(s)ds.$$

(c) Demuestra que en limite $T \to \infty$ la expresión anterior se reduce a

$$Y(t) = \int_t^\infty e^{-r(s-t)}X(s)\,ds.$$

(d) Mediante el cambio de variable $\tau = s - t$ muestra que el resultado anterior puede rescribirse como

$$Y(t) = \int_0^\infty e^{-r\tau}X(\tau + t)\,d\tau.$$

Interpreta este resultado.

20. Considera la ecuación $\dot{Y}(t) - r(t)Y(t) = \delta(t)B(t)$ para el valor $Y(t) = Z(t)B(t)$ de una inversión al tiempo t, con $Z(t)$ la posición (cantidad de bonos), $r(t)$ la tasa de interés y $B(t) = B_T\ e^{-\int_t^T\ r(s)ds}$ el precio del bono, con $0 \leq t \leq T$. Supón que en un modelo particular se cumple

$$\dot{Y} = \left(r_0 - \frac{1}{t+1}\right)Y - \frac{T+1}{t+1}, \quad Y(T) = 1, \qquad (*)$$

con $r_0 > 0$ una constante.

(a) Identifica la tasa de interés $r(t)$.

(b) Encuentra el valor de un bono $B(t)$ tal que $B(T) = 1$.

(c) Identifica el cambio marginal $\delta(t)$ en la posición de la inversión.

(d) Encuentra la posición $Z(t)$, definida por $\dot{Z} = \delta(t)$.

(e) Resuelve la ecuación (*) y luego verifica que la función $Y(t)$ obtenida satisface $Y(t) = Z(t)B(t)$.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA
TAREA 5
ECUACIONES DIFERENCIALES I
(SEGUNDA PARTE)
(Temas 4.3-4.4)

1. Resuelve las siguientes ecuaciones separables:

   (a) $y' + 2xy = y$

   (b) $\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma} = \dfrac{\varepsilon}{\sigma\,(\ln\sigma)}$

   (c) $\sqrt{1-t^2}\;\dot{y} = t\sqrt{1-y^2}$

   (d) $2p\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-16}}$

   (e) $(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$

   (f) $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones separables con condición inicial:

   (a) $y'(\lambda) = ye^{\lambda}, \quad y(0) = -2$

   (b) $\dot{x} = \dfrac{t^2}{x + t^3x}, \quad x(0) = -2$

   (c) $\tan x\,\dfrac{dy}{dx} = y, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

   (d) $2\sqrt{x}\,\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 y, \quad y(4) = \dfrac{\pi}{4}$

   (e) $\dot{y} = \dfrac{t^3+1}{y^3+1}, \quad y(1) = 2$

   (f) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2, \quad y(1) = -1$

3. Encuentra una función de costo $C(Q)$ tal que el costo marginal dC/dQ sea igual al costo promedio C/Q.

4. Sean $X = X(t)$ el producto nacional, $K = K(t)$ el acervo de capital y $L = L(t)$ la mano de obra de un país al tiempo $t \geq 0$. Supón que $X = AK^{1-\alpha}L^{\alpha}$, $\dot{K} = sX$ y $L(t) = L_0e^{\lambda t}$, con $0 < \alpha < 1$, $0 < s < 1$ y $A, L_0, \lambda \in \Re^+$. Deduce una ecuación diferencial para determinar $K(t)$ y luego encuentra su solución, si $K(0) = K_0$.

5. Resuelve la ecuación $\frac{dY}{dp} = e^{\alpha p+\beta Y+\gamma}$ con condición inicial $Y(q) = I$, donde $\alpha, \beta, \gamma, q, I \in \Re^+$.

6. Referente a un estudio de funciones de producción CES, Arrow, Chenery, Minhas y Solow trataron la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-\alpha y^\rho)}{x}$, con $x > 0$, $0 < y < \alpha^{-1/\rho}$, donde α y $\rho \neq 0$ son constantes. Utiliza la identidad $\frac{1}{y(1-\alpha y^\rho)} = \frac{1}{y} + \frac{\alpha y^{\rho-1}}{1-\alpha y^\rho}$ para probar que la solución de la ecuación diferencial es de la forma $y(x) = (\beta x^{-\rho} + \alpha)^{-1/\rho}$.

7. Sea $\dot{x} + a(t)x = 0$, con $a(t) = a + bc^t$, donde a, b, c son positivas, $c \neq 1$. Demuestra que la solución de esta ecuación puede escribirse en la forma $x(t) = Cp^t q^{c^t}$, donde p y q son constantes determinadas por a, b y c, mientras que C es una constante arbitraria. Esta es la ley de mortalidad de Gompertz-Makeham.

8. Resuelve cada ecuación utilizando la sustitución propuesta:

   (a) $\frac{dr}{d\theta} = r - 4\theta + 4, \quad u = r - 4\theta$
   (b) $t\frac{dx}{dt} = e^{-xt} - x, \quad$ con $x(1) = 0$; $\; u = xt$
   (c) $(x + e^y)\, y' = xe^{-y} - 1; \quad u = x + e^y$
   (d) $e^x \frac{dx}{dt} = 2e^t\sqrt{16 - e^{2x}}; \quad u = e^x$
   (e) $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} + \frac{xt}{\ln(xt)}; \quad u = \ln(xt); \quad x, t > 1$
   (f) $\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{t} + t\sec\left(\frac{x}{t^2}\right); \quad u = \frac{x}{t^2}$
   (g) $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{x + t^2}; \quad u = x + t^2.$

9. Resuelve la ecuación $\dot{v} = 9e^v - 1$ de las siguientes dos maneras:

   (a) Como una ecuación separable.
   (b) Usando la sustitución $u = e^{-v}$.

10. (a) Demuestra que la sustitución $u = \ln y$ transforma la ecuación no lineal $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)(y \ln y)$ en la ecuación lineal $\frac{du}{dx} - Q(x)u(x) = -P(x)$.

(b) Utiliza lo anterior para resolver $x\dfrac{dy}{dx} - 4x^2y + 2y\ln y = 0.$

11. Considera la siguiente ecuación, con f una función continua:

$$t\dot{x} = x - f(t)x^2, \qquad t > 0. \tag{*}$$

(a) Muestra que la sustitución $u = x/t$ transforma $(*)$ en una ecuación separable para $u(t)$.

(b) Si $f(t) = \dfrac{t^3}{t^4+2}$, encuentra la curva solución de $(*)$ que pasa por el punto $(1, 1)$.

12. Considera la siguiente ecuación, con g una función continua:

$$\dot{x} = g\left(x/t\right), \qquad t > 0. \tag{**}$$

(a) Muestra que la sustitución $u = x/t$ transforma $(**)$ en una ecuación separable para $u(t)$.

(b) Usa el resultado anterior para resolver $\dot{x} = 1 + (x/t) - (x/t)^2$.

13. Resuelve las siguientes ecuaciones tipo Bernoulli:

(a) $\dot{x} + 2x = -x^2$

(b) $\dot{x} - \dfrac{1}{t}x = -\dfrac{1}{t}x^2$

(c) $x\dfrac{dx}{dt} = x^2 + x^4, \quad x(0) = -1$

(d) $\dot{x} = \dfrac{2x}{t} - 5x^2t^2, \quad x(1) = \dfrac{1}{2}$

(e) $2y\dot{y} - y^2 = e^{3t}, \quad y(0) = -1$

(f) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^7, \quad y(0) = 1$

14. Resuelve la ecuación $\dot{x} = tx + \dfrac{t}{x}$ de las siguientes maneras: a) como una ecuación de Bernoulli, b) como una ecuación separable.

15. Vuelve a resolver la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\left(1 - \alpha y^{\rho}\right)}{x}$ del ejercicio 6, pero ahora como una ecuación Bernoulli. ¿Qué método prefieres?

16. Resuelve cada ecuación utilizando la sustitución propuesta:

(a) $\dot{x} = (x-t)^2 - (x-t) + 1; \quad u = x - t$

(b) $\dot{x} = 2x + \dfrac{x}{t} + \dfrac{x^2}{t}; \quad u = \dfrac{x}{t}$

(c) $\dot{x} = 1 + e^x; \quad u = e^x$

17. Un modelo para la propagación de un rumor en un pueblito está descrito por la ecuación

$$\dot{N} = kN\left(N^* - N\right),$$

en donde N^* es la población total del pueblito, $N(t) \leq N^*$ es el número de personas que ha escuchado el rumor al tiempo t y $k > 0$ es un parámetro inherente al pueblito. Si inicialmente conocen el rumor N_0 personas, con $0 < N_0 < N^*$, encuentra una expresión para $N(t)$. ¿Qué predice el modelo que sucederá a largo plazo?

18. En el modelo de Solow el capital *per capita*, k, satisface la ecuación

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)\, k,$$

en donde $f(k)$ representa la producción *per capita*, $0 < s < 1$ la tasa de ahorro, $n > 0$ la tasa de crecimiento de la fuerza laboral y $\delta > 0$ la tasa de depreciación del capital. Resuelve para $k(t)$ suponiendo que $f(k) = k^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$. Luego determina el comportamiento de $k(t)$ a largo plazo.

19. Un modelo de crecimiento económico conduce a la ecuación

$$\dot{k} = \alpha A(n_0)^\alpha e^{(\alpha v + \epsilon)t} k^b - \alpha\delta k$$

con $A, n_0, a, b, v, \alpha, \delta, \epsilon \in \Re^+$. Halla la solución general de la ecuación, suponiendo que $\alpha v + \epsilon + \alpha\delta\,(1 - b) \neq 0$.

20. Una cierta población evoluciona de acuerdo con la ecuación

$$\dot{P} = P\left(b - a \ln P\right)$$

con $P(t) > 0$ y con $a, b > 0$ constantes.

(a) Encuentra el punto fijo P^* de la ecuación.

(b) Demuestra que con la sustitución $x = \ln P$ se obtiene la ecuación lineal autónoma $\dot{x} + ax = b$. Resuelve esta ecuación.

(c) Encuentra $P(t)$, suponiendo que $P(0) = 1$.

(d) Determina $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

21. En cada inciso realiza el diagrama de fase, identifica los puntos de equilibrio y determina si son inestables o inestables. Sin resolver la ecuación, esboza la gráfica de las posibles soluciones.

    (a) $\dot{x} = 4 - 2x$

    (b) $\dot{x} = x^3 - 15x^2 + 36x$

    (c) $y'(r) = \ln(y+1)$

    (d) $\theta'(\alpha) = e^{-\theta} - 1$

    (e) $\dot{x} = 2x \ln\left(\dfrac{k}{x}\right), \quad x > 0, k > 0$

    (f) $\dot{x} = (x-2)^2$ (¿qué notas de especial en este último ejercicio?)

22. Realiza el análisis cualitativo para la ecuación $\dot{x} = ax - 2a$ en términos de los valores del parámetro $a \neq 0$. Sin resolver la ecuación, esboza la gráfica de las posibles soluciones $x(t)$.

23. Considera la ecuación $\dot{x} = x^2(x-2)$.

    (a) Identifica los puntos fijos.

    (b) Realiza el diagrama de fase correspondiente, indicando claramente en el dibujo la localización de esos puntos y qué variables representan los ejes.

    (c) A partir del diagrama de fase determina el valor de $\lim_{t\to\infty} x(t)$ para cada una de las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = -1$, $x(0) = 1$ y $x(0) = 3$.

    (d) Sin resolver la ecuación, bosqueja en el plano xt las trayectorias solución correspondientes a cada una de las condiciones iniciales del inciso anterior.

24. Considera la siguiente ecuación para el trabajo $L(t) \geq 0$, con $\alpha, \beta \in \Re^+$:
$$\dot{L} = L\left(\alpha - \beta\sqrt{L}\right)$$

    (a) Identifica los puntos fijos.

    (b) Realiza el diagrama de fase correspondiente, indicando claramente en el dibujo la localización de esos puntos y qué variables representan los ejes.

    (c) Esboza la gráfica de las posibles soluciones, indicando la localización de las asíntotas y cuál es el nombre de los ejes.

    (d) Encuentra la solución $L(t)$ del problema.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA
TAREA 6
ECUACIONES DIFERENCIALES II
(PRIMERA PARTE)
(Tema 5.1)

1. Un estudio de la explotación óptima de un recurso natural utiliza la ecuación

$$\ddot{x} - \frac{2-\alpha}{1-\alpha} a\dot{x} + \frac{a^2}{1-\alpha} x = 0 \qquad (\alpha \neq 0, 1 \quad a \neq 0).$$

   Verifica, por medio de sustitución, que $u_1 = e^{at}$ y $u_2 = e^{at/(1-\alpha)}$ son soluciones. ¿Cuál es la solución general de la ecuación?

2. Resuelve las siguientes ecuaciones homogéneas:

   (a) $2\ddot{x} - 10\dot{x} + 12x = 0$
   (b) $\ddot{x} - x = 0, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 1$
   (c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$
   (d) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$

3. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones no homogéneas:

   (a) $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 4, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$
   (b) $\ddot{x} + \dot{x} = 2, \quad x(0) = 4, \dot{x}(0) = 1$
   (c) $\ddot{x} + x = 1$
   (d) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 17x = 17$

4. Encuentra la solución general de la ecuación $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = f(t)$, en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $f(t) = 8t$
   (b) $f(t) = 4e^{-2t}$
   (c) $f(t) = 4e^{2t}$

5. Utiliza el método de los coeficientes indeterminados para encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones no homogéneas:

   (a) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 9x^2$
   (b) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 4e^t - 9t$

(c) $r''(\theta) - 2r'(\theta) - 3r(\theta) = 2e^{\theta} - 10\,sen\,\theta$

(d) $x''(\alpha) - x'(\alpha) - 2x(\alpha) = 4e^{-\alpha}$

6. Encuentra la solución a la ecuación $\ddot{x} - 2\dot{x} = 2e^{2t}$, utilizando: i) la sustitución $u = \dot{x}$, ii) el método de los coeficientes indeterminados.

7. Resuelve la ecuación $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 8e^{-t}$ y luego calcula $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

8. Encuentra la solución $p(t)$ a la siguiente ecuación y luego calcula $\lim_{t\to\infty} p(t)$:

$$\ddot{p} + \frac{m}{n}\dot{p} - \left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)p = -\left(\frac{\alpha+\gamma}{n}\right),$$

en donde $\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\frac{(\beta+\delta)}{n} = 0,\ \ \beta+\delta \neq 0,\ \ m,n > 0.$

9. Encuentra la solución general $p(t)$ de la ecuación

$$\ddot{p} + \beta\dot{p} + p = m,$$

en donde $\beta^2 < 4$ y $m > 0$. ¿Para qué valores de β la solución converge a la larga $(t \to \infty)$ y a qué converge?

10. Considera el siguiente modelo de Friedman para analizar la relación de Phillips, donde p es la tasa de inflación real, π es la tasa de inflación esperada,U es la tasa de desempleo y m la tasa de crecimiento nominal de la moneda:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4} - 2U + \pi \,\ldots\ldots\, (1) \\ \pi' &= \frac{1}{2}(p - \pi) \ \ \ldots\ldots\, (2) \\ U' &= p - m \quad\ \ \ldots\ldots\, (3) \end{aligned}$$

(a) Encuentra una ecuación de segundo orden para la inflación esperada π.

(b) Encuentra $\pi(t)$ e indica si ésta tendrá un comportamiento fluctuante.

(c) Argumenta por qué $\pi(t)$ es asintóticamente estable.

11. Resuelve la siguiente ecuación para $\pi(t)$ y luego determina el comportamiento de $\pi(t)$ a largo plazo $(t \to \infty)$:

$$\ddot{\pi} + 6\dot{\pi} + 9\pi = 4e^{-3t}.$$

12. Resuelve la siguiente ecuación para $\pi(t)$ y luego determina el intervalo de valores de γ para el que la solución converge a largo plazo ($t \to \infty$), o bien, justifica si esto no es posible:

$$\ddot{\pi} - 2\gamma\dot{\pi} + 4\pi = 0, \qquad \gamma^2 < 4.$$

13. En cierto modelo la inflación esperada π satisface la siguiente ecuación (K es constante):

$$\ddot{\pi} - \dot{\pi} - 6\pi = -18, \quad \pi(0) = 5, \quad \dot{\pi}(0) = K.$$

   (a) Resuelve la ecuación para las condiciones iniciales dadas.

   (b) ¿Para qué valor de K la solución converge a largo plazo? ¿A qué valor converge?

14. Un modelo debido a F. Dresch establece que la tasa de aumento de precios es proporcional al total acumulado de todos los excesos de demanda pasados, es decir,

$$\dot{p}(t) = a \int_{-\infty}^{t} [D(p(\tau)) - S(p(\tau))]\, d\tau,$$

en donde $p(t)$ designa un indice de precios al instante t, $D(p)$ y $S(p)$ son la demanda y la oferta agregadas, respectivamente, y $a > 0$ es una constante.

   (a) Deriva respecto a t para obtener una ecuación de segundo orden para $p(t)$.

   (b) Hallla la solución general de esta última ecuación, suponiendo que $D(p) = d_0 + d_1 p$ y $S(p) = s_0 + s_1 p$, con $d_1 < 0$ y $s_1 > 0$.

15. Resuelve la siguiente ecuación para $p(t)$, obtenida en un modelo económico debido a T. Haavelmo, con γ, α, a, k constantes:

$$\ddot{p}(t) = \gamma(\beta - \alpha)p(t) + k.$$

Analiza las posibles soluciones de esta ecuación, en función del signo de $\gamma(\beta - \alpha)$.

16. En cada inciso deriva con respecto a t ambos lados de la igualdad para obtener una ecuación de segundo orden para $x(t)$, y luego resuelve el problema correspondiente de condiciones iniciales:

   (a) $\dot{x} = 8e^{2t} \int_0^t e^{-2u} x(u)du, \;\; x(0) = 3$

   (b) $\dot{x} = 4x + e^{4t} \int_0^t e^{-4u} x(u)du, \;\; x(0) = 8$

17. Encuentra una ecuación diferencial de la forma $a\ddot{x}+b\dot{x}+cx = f(t)$, con a, b y c constantes, $a \neq 0$, cuya solución sea:

    (a) $x(t) = Ae^{2t} + Be^{t}$

    (b) $x(t) = e^{-2t}(A\cos t + B\,sen\,t)$

    (c) $x(t) = Ae^{2t} + Be^{t} + 3t + 1$

18. Resuelve la ecuación de tercer orden $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$.

19. En un modelo debido a T. Haavelmo, una función $k(t)$ satisface la ecuación

$$\ddot{k} = (\gamma_1\lambda + \gamma_2)\dot{k} + (\gamma_1\sigma + \gamma_3)\mu_0 e^{\mu t}\int_0^t e^{-\mu\tau}\dot{k}(\tau)d\tau,$$

en donde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda, \sigma, \mu_0, \mu$ son constantes. Deduce una ecuación diferencial de tercer orden para $k(t)$. Determina bajo qué condiciones se obtienen tres raíces reales distintas. En este caso, prueba que la solución es de la forma

$$k(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + C_3.$$

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOMÍA
TAREA 7
ECUACIONES DIFERENCIALES II
(SEGUNDA PARTE)
(Temas 5.2-5.5)

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales autónomas:

   (a) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$

   (b) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$

   (c) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

   (d) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$

   (e) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$

   (f) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no autónomas:

   (a) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} + \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ 32e^{-2t} \end{pmatrix}$

   (b) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} + \begin{pmatrix} -3t \\ 11 \end{pmatrix}$

   (c) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^{-t} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{X}(0) = \overrightarrow{0}$

   (d) $\dot{x} = x - t$
   $\dot{y} = 2x - y$

3. Encuentra un sistema lineal autónomo, de la forma $\dot{\overrightarrow{X}} = A\overrightarrow{X} + \overrightarrow{B}$, cuya solución sea:

   (a) $\overrightarrow{X}(t) = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

   (b) $\overrightarrow{X}(t) = k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. En cada inciso resuelve el sistema con la condición inicial dada, y después encuentra $\lim\limits_{t\to\infty}\overrightarrow{X}(t)$, si éste existe:

   (a) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\overrightarrow{X}, \qquad \overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{X}, \qquad \overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Resuelve el sistema $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{X}$ con condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3w \end{pmatrix}$, donde $w \in \Re$ es una constante. ¿Cuánto debe valer w si se desea que $\lim\limits_{t\to\infty}\overrightarrow{X}(t) = \overrightarrow{0}$?

6. Identifica el punto fijo $\overrightarrow{p}^*$ del sistema $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{X} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ del problema 1c. Determina las condiciones bajo las cuales la solución converge a largo plazo. En ese caso, demuestra que $\lim\limits_{t\to\infty}\overrightarrow{X}(t) = \overrightarrow{p}^*$.

7. Resuelve el sistema $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\overrightarrow{X}$, con $\beta > 0$, suponiendo que $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de α la solución converge a largo plazo ($t \to \infty$)?

8. Considera el sistema $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{X}$, en donde $c \in \mathbb{R}$, $c \neq -1$.

   (a) Demuestra que los valores propios del sistema son $\lambda_1 = c$ y $\lambda_2 = -1$.

   (b) Encuentra la solución general del sistema.

   (c) Analiza la estabilidad en los casos i) $-1 \neq c < 0$, ii) $c = 0$ y iii) $c > 0$.

9. Sea p el nivel de precios y w el salario nominal. El cambio en el salario está dado por $\dot{w} = A(w - ap)$. La inflación $\dot{p}$ está determinada por el cambio en el salario y por la presión en la demanda, de manera que satisface la ecuación $\dot{p} = B\dot{w} + C(w - ap)$. Adicionalmente, se tiene que $a, A, B, C > 0$ y $a(AB + C) > A$. Resuelve el sistema y analiza el tipo de equilibrio que se obtiene.

10. Considera el sistema lineal

$$\dot{\pi} = \beta\pi + y, \quad \dot{y} = -\pi - \alpha, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

    (a) Determina el intervalo de valores de β tales que el punto fijo es un nodo atractor.

    (b) Determina el intervalo de valores de β tales que el punto fijo es un punto silla.

11. El ingreso y y el índice de precios p se relacionan de acuerdo con

$$\dot{y} = ay - p, \quad \dot{p} = y - bp + ab - 1, \quad a, b > 0.$$

    (a) ¿Para qué valores de a y b se tiene un comportamiento cíclico de las variables?

    (b) ¿Para qué valores de a y b es estable el sistema?

12. En los siguientes incisos: i) determina el punto fijo $\overrightarrow{p}^*$ y demuestra que se trata de un punto silla, ii) encuentra la solución general de la ecuación, iii) en el plano xy dibuja las trayectorias correspondientes a varias condiciones iniciales, especificando cuál es la dirección estable y cuál la inestable, iv) encuentra la ecuación cartesiana de los espacios estables E^s e inestable E^u en el punto $\overrightarrow{p}^*$:

    (a) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

    (b) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

    (c) $\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

13. Encuentra y clasifica los puntos fijos de cada uno de los sistemas del problema 1 y realiza con todo detalle (isoclinas, flechitas, ...) el diagrama de fase correspondiente.

14. En cada inciso encuentra y clasifica los puntos fijos:

    (a) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = 1 - x^2$.

    (b) $\dot{x} = 4x - 3xy, \quad \dot{y} = 3y - xy$.

15. En cada inciso encuentra y clasifica el punto fijo $\vec{p}^*$. Luego esboza el diagrama de fase, conteniendo las isoclinas y su dirección de cruce ($m = 0, m \to \infty$), el sentido de movimiento, alguna(s) trayectoria(s) representativa(s) y el punto fijo:

    (a) $\dot{x} = 2(y - e^x), \quad \dot{y} = -x$

    (b) $\dot{x} = y - 1, \quad \dot{y} = 2(e^x - y)$

    (c) $\dot{x} = y + \ln x, \quad \dot{y} = 1 - x$, con $x > 0$

16. En cada inciso: i) halla el punto fijo $\vec{p}^*$ y demuestra que es un punto silla, ii) da la gráfica y la ecuación cartesiana de los espacios estable $E^s(\vec{p}^*)$ e inestable $E^u(\vec{p}^*)$, iii) dibuja las isoclinas, su dirección de cruce ($m = 0, m \to \infty$) y el sentido de movimiento de las trayectorias, iv) esboza el diagrama de fase completo:

    (a) $\dot{x} = y - 2, \quad \dot{y} = y - 2e^{-x}$

    (b) $\dot{x} = 3\ln x - 2y, \quad \dot{y} = 2(1 - x)$, con $x > 0$

    (c) $\dot{x} = y + 1 - e^x, \quad \dot{y} = ye^x$

    (d) $\dot{x} = x - 1, \quad \dot{y} = e^x - y$

    (e) $\dot{x} = -2x + y, \qquad \dot{y} = -\dfrac{6}{ax} + 3y$, con $x, y > 0$ y $a > 0$

17. En el modelo de crecimiento económico de Ramsey-Keynes, el capital *per capita* $k(t) > 0$ y el consumo $c(t) > 0$ satisfacen

$$\dot{k} = f(k) - (n + \delta)k - c, \quad \dot{c} = \frac{c}{\theta}(f'(k) - \rho), \quad n, \theta, \rho > 0.$$

    Suponiendo que $f(k) = k^{1/2}$, $n + \delta = 1/5$ y $\theta = \rho = 1/2$:

    (a) Encuentra el punto fijo (k^*, c^*) y demuestra que es un punto silla.

    (b) Encuentra las direcciones estable e inestable en el punto silla (k^*, c^*).

    (c) Suponiendo que el capital inicial es $k_0 = 0.1 + k^*$, ¿aproximadamente qué valor debe tener el consumo inicial c_0 para que el sistema converja al punto (k^*, c^*)?

    (d) Esboza el diagrama de fase del sistema.