Métodos Matemáticos para la Dinámica Económica

Guillermo Pastor[1]

Otoño 2019

[1]Departamento de Matemáticas, ITAM

Índice general

Preface

Estas notas de clase sólo pretenden ser un complemento a los textos más extensos que introducen el tema de los modelos dinámicos a los alumnos de economía. Surgen de la clase *Matemáticas Aplicadas a la Economía* que los alumnos del ITAM cursan después de haber tomado una introducción al cálculo diferencial e integral así como al algebra lineal. Estos son los únicos prerrequisitos y se ha buscado mantener el nivel del texto al alcance de estudiantes de economía con un bagaje matemático estándar.

Se ha incorporado una cantidad considerable de modelos económicos con el fin de hacer más atractivo al estudiante de economía el desarrollo de los conceptos y métodos matemáticos asociados a los modelos dinámicos. Así, la presentación de los modelos económicos es en general muy breve y el lector interesado deberá consultar las fuentes originales para conocer más a fondo los supuestos, limitaciones y alcances de estos modelos. La mayoría de los ejemplos y modelos son bien conocidos, y la única originalidad que estas notas pudiesen contener se encuentra quizás en la forma en que se desarrollan y presentan las ideas.

En los dos primeros capítulos se introducen los modelos dinámicos en tiempo discreto. En el primero se da una introducción a las ecuaciones en diferencias y a los sistemas de ecuaciones en diferencias. En el segundo capítulo se presentan algunos conceptos básicos de programación dinámica.

El resto de las notas está dedicado a los modelos en tiempo continuo. Al igual que en el caso discreto se comienza con una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias y a los sistemas de ecuaciones diferenciales. El último capítulo contiene una presentación breve de la teoría de control.

La elaboración de estas notas no hubiese sido posible sin la ayuda de algunos de mis colegas del ITAM. En particular, quiero agradecer a Beatriz Rumbos, Lorena Zogaib, Héctor Lomelí y José Campero sus valiosos comentarios y observaciones.

Capítulo 1

Ecuaciones en diferencias

Es común que las variables económicas no evolucionen en forma continua a lo largo del tiempo, sino que son determinadas en periodos fijos. Tal es el caso de los índices de la inflación que mes a mes reporta el INEGI o las tasas de crecimiento del PIB que son estimadas trimestralmente también por el INEGI. En este primer capítulo presentaremos algunos modelos sencillos que nos permitan modelar cómo evolucionan estas variables. Una herramienta muy importante para este fin es una **ecuación en diferencias**. En ella se establece una relación entre una variable endógena en un periodo con los valores de otras variables en uno o más periodos anteriores. Consideraremos entonces sucesiones de valores

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots$$

de una variable a lo largo del tiempo. Si por ejemplo y_t denota el índice de precios en el mes t, la ecuación

$$y_{t+1} = 1{,}002 y_t$$

indica que mes a mes los precios aumentan en un 0.2 %.

1.1. Ecuaciones lineales de primer orden

Una gran cantidad de problemas financieros puede expresarse por medio de ecuaciones en diferencias. Comencemos con el caso de Doña Gamucita que que al enviudar recibió un pago de $\$2'000,000$ por el seguro de vida de su marido. Doña Gamucita decide invertir esta cantidad en un instrumento que le paga un interés fijo del 6 % anual capitalizable mensualmente y desea retirar mes a mes una cantidad fija por un lapso de 15 años. ¿Cuál es el monto de estos retiros para que el capital se agote al finalizar el periodo de 15 años?

Si denotamos por P_t al capital al inicio del mes t y por r a la cantidad que retira para sus gastos mensuales, entonces la situación está representada por la ecuación

$$P_{t+1} = 1{,}005 P_t - r,$$

donde además se deben satisfacer las condiciones $P_0 = 2'000,000$ y $P_{180} = 0$. Una ecuación de este tipo se dice que es **lineal de primer orden**. El calificativo de lineal se debe a que la variable P_t sólo viene acompañada del coeficiente 1.005, mientras que el orden se refiere al número de periodos anteriores involucrados en la determinación de la variable. Una solución consiste entonces de una sucesión $P_0, P_1, P_2, ..., P_{180}$ y de una cantidad r fija que satisfagan las condiciones anteriores.

Para ver cómo se obtienen las soluciones consideremos primero de forma general ecuaciones de la forma

$$y_{t+1} = ay_t + b$$

con a y b constantes y con un valor inicial y_0. Este valor y_0 se conoce como **condición inicial**. Vamos primero cómo debe ser la solución de esta **ecuación general**:

$$y_1 = ay_0 + b,$$
$$y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b.$$

Después de simplificar esta expresión se tiene

$$y_2 = y_0 a^2 + ab + b,$$

por lo que

$$y_3 = ay_2 + b = a(y_0 a^2 + ab + b) + b.$$

Simplificando de nuevo se llega a

$$y_3 = y_0 a^3 + a^2 b + ab + b.$$

Si repetimos el proceso una vez más obtenemos

$$\begin{aligned} y_4 &= a(y_0 a^3 + a^2 b + ab + b) + b \\ &= a^4 y_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b. \end{aligned}$$

Generalizando esta última ecuación es posible obtener una expresión para y_t. Para ello escribimos primero la última ecuación como

$$y_4 = y_0 a^4 + b \sum_{i=0}^{3} a^i$$

de modo que es fácil observar que

$$y_t = y_0 a^t + b \sum_{i=0}^{t-1} a^i.$$

Podemos simplificar un poco esta expresión. Recordemos que si

$$S = \sum_{i=0}^{t-1} a^i,$$

entonces

$$aS - S = a^t - 1,$$

por lo que al despejar S se llega a

$$S = \frac{1 - a^t}{1 - a},$$

por lo que finalmente tenemos

$$y_t = y_0 a^t + b \frac{1 - a^t}{1 - a}.$$

A menudo resulta conveniente formular la solución asociando los términos que contienen al factor a^t. De esta forma

$$y_t = \left(y_0 - \frac{b}{1 - a} \right) a^t + \frac{b}{1 - a}.$$

Observemos que la fórmula para S arriba presupone que $a \neq 1$. Si además denotamos por c al coeficiente que multiplica a a^t, entonces se llega al siguiente resultado.

Theorem 1 *La solución general de la ecuación en diferencias lineal de primer orden $y_{t+1} = ay_t + b$, con $a \neq 1$, viene dada por*

$$y_t = ca^t + \frac{b}{1 - a},$$

donde c es una constante que depende de las condiciones iniciales.

Observemos que la ecuación $y_{t+1} = ay_t + b$ tiene una infinidad de soluciones, una para cada valor de c, esto es, una para cada valor de la condición inicial y_0. Cuando no tenemos especificada una condición inicial no es posible determinar la constante c y a la expresión

$$y_t = ca^t + \frac{b}{1-a},$$

le llamamos la **solución general** de la ecuación $y_{t+1} = ay_t + b$. Por otro lado, una **solución particular** es aquella que corresponde a una condición inicial y_0 dada, esto es, a un valor específico de c. Un caso especial de solución particular es la asociada al valor de $c = 0$, donde la solución toma la forma

$$y_t = \frac{b}{1-a}$$

y resulta constante para todo tiempo t. Esta es la **solución estacionaria** o **solución de equilibrio**. También nos referimos a este valor como el **estado estacionario**.

Al aplicar la fórmula de la solución general cuando el parámetro a es negativo debemos ser cuidadosos con el manejo de los signos. Por ejemplo, si $a = -2$, entonces la solución general viene dada por

$$y_t = c(-2)^t + \frac{b}{1+2} = c(-2)^t + \frac{b}{3}.$$

La expresión

$$y_t = c(-2^t) + \frac{b}{1+2} = -c2^t + \frac{b}{3}$$

no es igual a la anterior ya que éstas difieren cuando t es par.

Volvamos ahora al problema de Doña Gamucita. De acuerdo a nuestro resultado podemos expresar la solución general como

$$P_t = c(1{,}005)^t - \frac{r}{1-1{,}005} = c(1{,}005)^t + 200r.$$

Recordemos además que $P_0 = 2'000,000$ y que $P_{180} = 0$. Esta información da lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c + 200r &= 2000000 \\ c(1{,}005)^{180} + 200r &= 0 \end{aligned}$$

del cual obtenemos el valor de la constante $c = -1'375,427{,}31$, así como el valor del retiro mensual $r = 16,877{,}14$. Así pues, si Doña Gamucita retira \$16,877.14 pesos mensualmente, su inversión se irá reduciendo paulatinamente hasta que a los quince años se le agotará. Más aún, con la expresión

$$P_t = -1375427(1{,}005)^t + \frac{16877{,}14}{0{,}005}$$

podemos determinar el valor de la inversión en cualquier momento. Por ejemplo, a los siete años y medio, la mitad del periodo de la inversión, el monto del capital será

$$\begin{aligned} P_{90} &= -1375427(1{,}005)^{90} + \frac{16877{,}14}{0{,}005} \\ &= 1'220,745{,}22. \end{aligned}$$

El comportamiento a largo plazo de la solución de una ecuación lineal de primer orden en relación al estado estacionario depende de los valores del parámetro a. Puesto que

$$y_t = ca^t + \frac{b}{1-a},$$

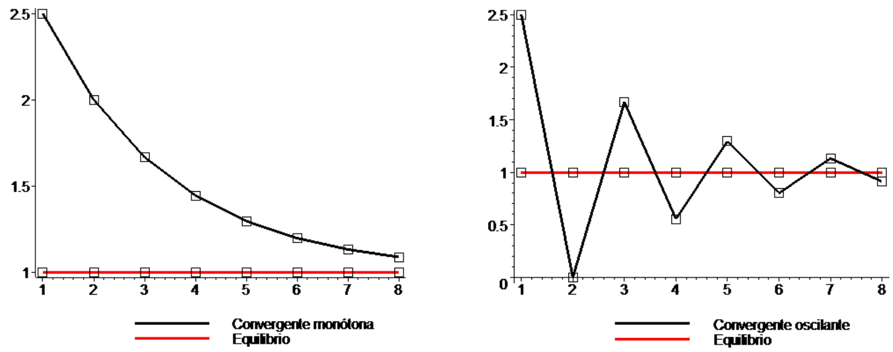
distinguimos varios casos.

Observemos primero que cuando $-1 < a < 1$ la sucesión a^t tiende a cero, de modo que cualquier solución converge a al estado estacionario en el largo plazo. En este caso se dice que la solución estacionaria es **estable**. Esto significa que si tomamos cualquier condición inicial cercana al estado estacionario, esto es,

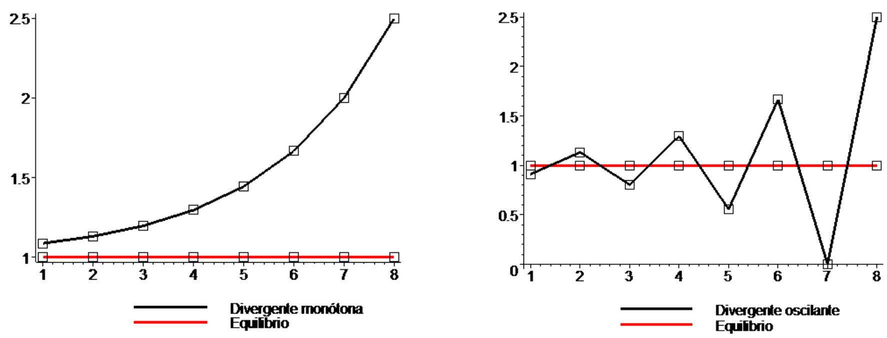
$$y_0 \approx \frac{b}{1-a},$$

entonces y_t tiende a regresar al estado estacionario.

Por otro lado, el signo de a determina si la sucesión a^t es **monótona** ($a > 0$), o bien, **alternant**e ($a < 0$). Así, cuando $a < 0$ la solución y_t oscilará alrededor del estado estacionario. En este último caso se dice también que la solución es **oscilante**. Las siguientes figuras muestran algunos casos típicos de soluciones convergentes.



Las soluciones divergentes se ilustran abajo.



Example 2 *Modelo de Producción Agrícola*

Supongamos que la función de costos para producir q toneladas de cebolla viene dada por $C(q) = \alpha q + \beta q^2$ y que hay un total de N productores idénticos. La función de demanda viene dada por $D(p) = \gamma - \delta p$. Las constantes α, β, γ y δ son todas positivas. Bajo competencia perfecta los productores observan el precio en el mercado y buscan maximizar sus beneficios

$$\pi(q) = pq - C(q) = (p - \alpha)q - \beta q^2.$$

Para ello establecen

$$\pi'(q) = p - \alpha - 2\beta q = 0,$$

de modo que producen $q = (p - \alpha)/2\beta$. La producción total viene dada entonces por

$$S(p) = N(p - \alpha)/2\beta,$$

donde es necesario suponer que $p > \alpha$. Al inicio del ciclo agrícola t los productores observan el precio p_t y producen en forma agregada $S(p_t) = N(p_t - \alpha)/2\beta$. Sin embargo, su producto alcanza el mercado al inicio del siguiente ciclo de producción, de modo que bajo condiciones de equilibrio se tiene $S(p_t) = D(p_{t+1})$, esto es,

$$\frac{N(p_t - \alpha)}{2\beta} = \gamma - \delta p_{t+1},$$

que al despejar p_{t+1} da lugar a la ecuación en diferencias

$$p_{t+1} = -\frac{N}{2\beta\delta} p_t + \frac{\alpha N + 2\beta\gamma}{2\beta\delta}.$$

Su solución viene dada por

$$p_t = c\left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t + \frac{\alpha N + 2\beta\gamma}{N + 2\beta\delta},$$

donde la constante c depende del precio inicial p_0. Como

$$-\frac{N}{2\beta\delta} < 0$$

los precios van a oscilar alrededor de la solución estacionaria

$$p^* = \frac{\alpha N + 2\beta\gamma}{N + 2\beta\delta},$$

que es fácil comprobar corresponde al precio de equilibrio. Los precios entonces van a ser un periodo arriba del precio de equilibrio y el siguiente abajo de él. Además, la solución convergerá al precio de equilibrio sólo si

$$\frac{N}{2\beta\delta} < 1,$$

esto es, $N < 2\beta\delta$.

Durante su larga experiencia y sufrimientos con los vaivenes de la economía mexicana, Doña Gamucita sabe bien que el valor del dinero no es constante. Su plan de inversión es ahora diferente: vuelve a invertir sus $2'000,000$ de pesos a una tasa del $6\,\%$ capitalizable mensualmente, pero desea que los retiros tengan un valor real constante. Si estima que la inflación en los próximos quince años será del 0.4 % mensual, la siguiente ecuación en diferencias expresa el problema financiero de Doña Gamucita:

$$P_{t+1} = 1{,}005 P_t - r(1{,}004)^t.$$

De manera un poco más general necesitamos resolver una ecuación en diferencias de la forma

$$y_{t+1} = ay_t + b_t.$$

Esta es también una ecuación en diferencias de primer orden, pero ahora el término b_t cambia con el tiempo. Hay un truco muy sencillo que nos ayuda a encontrar la solución general de este tipo de ecuaciones. Supongamos primero que ya tenemos una solución particular de ella, digamos

$$y_t^p = \{y_0^p, y_1^p, y_2^p, ...\}.$$

Sea y_t otra solución cualquiera. Entonces, la diferencia

$$y_t - y_t^p$$

satisface

$$\begin{aligned} y_{t+1} - y_{t+1}^p &= (ay_t + b_t) - (ay_t^p + b_t) \\ &= a(y_t - y_t^p) - (b_t - b_t) \\ &= a(y_t - y_t^p), \end{aligned}$$

esto es, $y_t - y_t^p$ es una solución de la **ecuación homogénea** $x_{t+1} - ax_t = 0$. Por el teorema anterior debe existir por tanto una constante c para la cual

$$y_t - y_t^p = ca^t,$$

de donde obtenemos

$$y_t = ca^t + y_t^p.$$

Este truco lo usaremos en varios escenarios y lo resumimos como:

La solución general de la ecuación $y_{t+1} = ay_t + b_t$ es la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y de una solución particular.

Esta observación sólo puede ser de utilidad si tenemos una forma de encontrar soluciones particulares. Cuando la forma del término b_t es sencilla podemos adivinar la forma de la solución. Este método de adivinanza se conoce como **Método de Coeficientes Indeterminados**. Aun cuando el nombre del método suena muy rimbombante en el fondo puede ser perfectamente descrito por el refrán "*Según el sapo, es la pedrada*" como a continuación veremos.

Consideremos la ecuación $y_{t+1} = 2y_t + 3t - 1$. Al reescribirla como $y_{t+1} - 2y_t = 3t - 1$ identificamos al término independiente como un polinomio de primer grado. Deseamos encontrar una función y_t^p que satisfaga esta ecuación. Es claro que si consideramos funciones de la forma $k2^t$, $\cos(kt)$ o bien $\sqrt{kt}$, no encontraremos a esta función. Nuestro candidato más sencillo sería considerar un polinomio de la forma $At + B$. Este polinomio debe satisfacer

$$A(t+1) + B - 2(At + B) = 3t - 1.$$

Nuestro objetivo es ahora **determinar** los coeficientes A y B que satisfacen esta ecuación. Si asociamos los términos de grado uno y de grado cero se tiene

$$-At + (A - B) = 3t - 1.$$

Pero estos polinomios son iguales sólo cuando sus coeficientes son iguales, esto es,

$$\begin{aligned} -A &= 3 \\ A - B &= -1 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = -3$, $B = -2$. La solución particular que encontramos es entonces $y_t^p = -3t - 2$. Verifiquemos que efectivamente se trata de una solución:

$$\begin{aligned} y_{t+1}^p - 2y_t^p &= -3(t+1) - 2 - 2(-3t - 2) \\ &= 3t - 1. \end{aligned}$$

La ecuación homogénea $y_{t+1} - 2y_t = 0$ tiene solución general $c2^t$, por lo que se llega a que la solución general de la ecuación $y_{t+1} = 2y_t + 3t - 1$ viene dada por

$$y_t = c2^t - 3t - 2.$$

Vamos a emplear estas ideas para ayudar a Doña Gamucita en sus decisiones financieras. La ecuación a resolver es

$$P_{t+1} = 1{,}005P_t - r1{,}004^t.$$

Proponemos entonces una solución de la forma $y_t^p = A\,(1{,}004)^t$. Esta solución debe entonces satisfacer

$$A(1{,}004)^{t+1} = 1{,}005A(1{,}004)^t - r(1{,}004)^t.$$

Simplificamos la ecuación dividiendo entre $(1{,}004)^t$ y obtenemos

$$A(1{,}004) = 1{,}005A - r,$$

de modo que al despejar A llegamos a

$$A = 1000r.$$

La solución general de la ecuación es por tanto

$$P_t = c(1{,}005)^t + 1000r(1{,}004)^t.$$

Debemos finalmete determinar los valores de las constantes c y r. Las condiciones $P_0 = 2'000,000$ y $P_{180} = 0$ determinan el sistema

$$\begin{aligned} c + 1000r &= 2'000,000 \\ c(1{,}005)^{180} + 1000r(1{,}004)^{180} &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$c = -10190959{,}8 \;\text{ y }\; r = 12190{,}96.$$

Esto significa que Doña Gamucita gozará en términos reales de un ingreso mensual comparable a lo hoy representan \$12,906.93. Podemos también emplear estos números para calcular el monto de la inversión en cualquier mes mediante la expresión

$$\begin{aligned} P_t &= -10190959{,}8\,(1{,}005)^t + 1000(12190{,}96)\,(1{,}004)^t \\ &= -10190959{,}8\,(1{,}005)^t + 12190960\,(1{,}004)^t. \end{aligned}$$

En particular, a la mitad de la vida de la inversión se tendrá un capital de

$$-10190959{,}8\,(1{,}005)^{90} + 12190960\,(1{,}004)^{90} = 1'496,422{,}43.$$

Cuando la forma del término independiente b_t es muy complicada, puede ser difícil encontrar el tipo de función que corresponde a una solución particular. Peor aun, el método de coeficientes indeterminados puede fallar con condiciones razonables. En este último caso se recomienda multiplicar por t la forma natural de la solución. Si persiste la falla, multiplicamos por otras potencias: t^2, t^3, etc.

Para la ecuación $y_{t+1} = 2y_t - 3\left(2^t\right)$, lo más natural es proponer una solución particular de la forma $y_t^p = A2^t$. Esta solución debe satisfacer

$$A2^{t+1} = 2\left(A2^t\right) - 3\left(2^t\right)$$

que al dividir por 2^t reduce la ecuación a

$$2A = 2A - 3,$$

la cual no tiene solución. Tratamos, de acuerdo a la sugerencia de arriba, $y_t^p = At2^t$. Ahora tenemos

$$A(t+1)2^{t+1} = 2\left(At2^t\right) - 3\left(2^t\right)$$

que al simplificar equivale a

$$2A(t+1) = 2At - 3,$$

cuya solución es $A = -3/2$. La solución particular buscada es por tanto

$$y_t^p = -\frac{3t2^t}{2} = -3t2^{t-1}.$$

La solución general de $y_{t+1} = 2y_t - 3\left(2^t\right)$ es

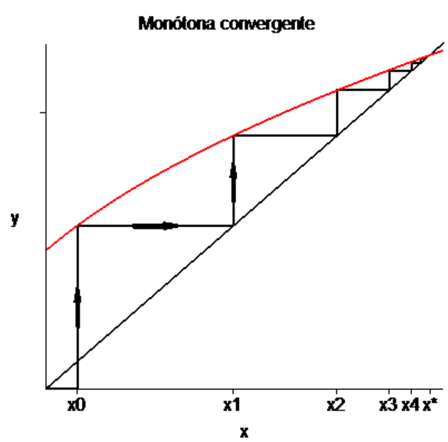
$$\begin{aligned} y_t &= c2^t - 3t2^{t-1} \\ &= (2c - 3t)2^{t-1}. \end{aligned}$$

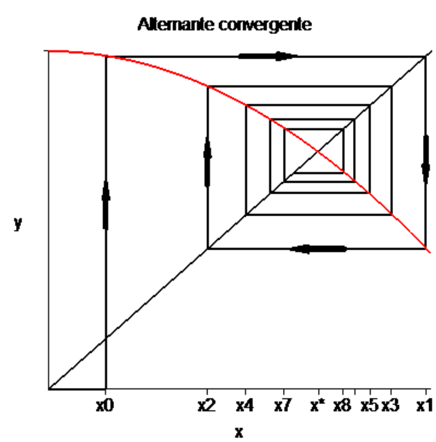
1.2. Ecuaciones generales de primer orden

Una ecuación general de primer orden puede escribirse como

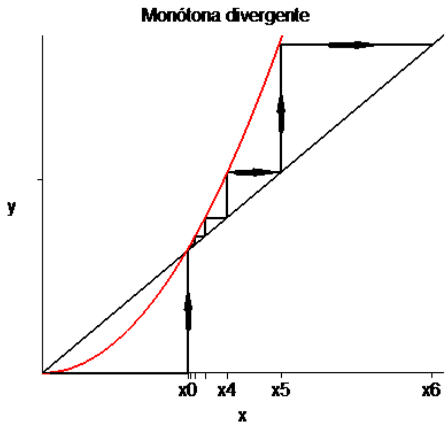
$$y_{t+1} = f(y_t, t),$$

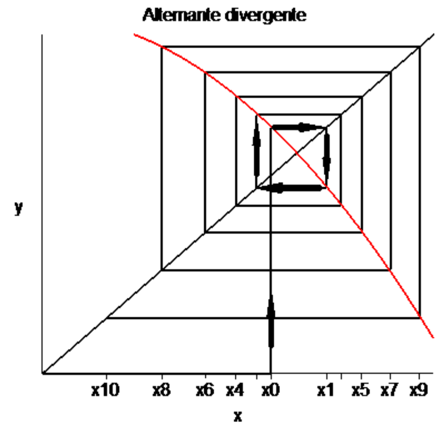
donde f es una expresión algebraica que depende tanto del valor de la variable en el periodo previo como del periodo t. En el ejemplo anterior se tiene que $f(y_t, t) = 2y_t - 3\,(2^t)$. Se dice que la ecuación es **autónoma** cuando la expresón algebraica f sólo depende del valor de la variable en el periodo anterior, esto es, $y_{t+1} = f(y_t)$. De esta forma, las ecuaciones $y_{t+1} = 2y_t - 3$, $y_{t+1} = \cos(3\pi y_t)$ y $x_{t+1} = \sqrt{4x_t + 2}$ son ecuaciones autónomas, mientras que la ecuación $P_{t+1} = aP_t - rb^t$ no lo es. Las soluciones de las ecuaciones autónomas pueden ser representadas geométricamente mediante el **diagrama de fase** asociado a la ecuación que a continuación describimos. Observemos primero que las soluciones estacionarias x^* de una ecuación autónoma $x_{t+1} = f(x_t)$ corresponden con los puntos fijos de la función f, $y^* = f(y^*)$. Ahora bien, dibujemos en el plano a la gráfica de la función f así como a la recta $y = x$. En el eje x representamos el valor inicial x_0. Como $x_1 = f(x_0)$, se tiene que x_1 corresponde a la altura de la gráfica de f sobre x_0. Si ahora nos movemos horizontalmente hasta tocar la recta $y = x$, el punto tendrá coordenadas (x_1, x_1). Si repetimos el proceso y nos desplazamos primero verticalmente hasta cruzar la gráfica de f y posteriormente nos desplazamos horizontalmente hasta la recta $y = x$, llegaremos a un punto con coordenadas (x_2, x_2). Si continuamos este proceso y proyectamos estos puntos sobre el eje x podemos observar cómo evoluciona la solución x_0, x_1, x_2, x_3, etc. Las siguientes figuras muestran algunos diagramas de fase asociados a ecuaciones autónomas. En estos dos ejemplos la solución estacionaria resulta ser estable.





El caso de soluciones estacionarias inestables se ilustra a continuación.





De los diagramas anteriores se desprende que el comportamiento de las soluciones alrededor de los estados estacionario varía si la función f es creciente o decreciente, así como si la gráfica de f es más vertical o más horizontal que la recta $y = x$. Esto nos sugiere el siguiente criterio de estabilidad para las soluciones estacionarias.

Theorem 3 *Sea x^* una solución estacionaria de la ecuación autónoma $x_{t+1} = f(x_t)$, donde f es una funciíón diferenciable.*
i) Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces la solución x^* es estable.
ii) Si $|f'(x^*)| > 1$, entonces la solución x^* es inestable.

Sólo demostraremos la parte i. Si f es diferenciable, entonces f' es continua y existe un pequeño intervalo $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ y una constante k tales que $|f'(x)| < k < 1$ si $x \epsilon (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$. Por el teorema del valor medio existe un número c entre x_t y x^* para el cual

$$x_{t+1} - x^* = f(x_t) - f(x^*) = f'(c)(x_t - x^*).$$

Así, si x_t es cercana a x^*, i.e. $|x_t - x^*| < \varepsilon$, entonces $|f'(c)| < k$. Por lo tanto,

$$|x_{t+1} - x^*| < k\,|x_t - x^*|\,.$$

En particular, si nuestro valor inicial x_0 satisface $|x_0 - x^*| < \varepsilon$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|x_1 - x^*| &< k\,|x_0 - x^*|\,, \\
|x_2 - x^*| &< k\,|x_1 - x^*| < k^2\,|x_0 - x^*|\,, \\
|x_3 - x^*| &< k\,|x_2 - x^*| < k^3\,|x_0 - x^*|\,, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Así, $|x_t - x^*| < k^t |x_0 - x^*|$. Como $0 < k < 1$, se tiene que $k^t \to 0$, y necesariamente también $|x_t - x^*| \to 0$.

El comportamiento de los fenómenos cíclicos es de sumo interés en las aplicaciones. Se dice que una solución x_t de la ecuación en diferencias $x_{t+1} = f(x_t)$ es **cíclica de periodo** k si se satisface que $x_t = x_{t+k}$ para todo t, pero $x_t \neq x_{t+j}$ para $t = 1, 2, ..., k-1$. Esto equivale a que la órbita $\{x_0, x_1, ...x_{k-1}\}$ se repite indefinidamente. El caso más sencillo es el de los ciclos de periodo 2 donde la solución alterna entre los valores x_0 y x_1. En este caso se tiene por un lado $x_0 = x_2 = x_4 = ...$ y por el otro $x_1 = x_3 = x_5 = ...$, pero $x_0 \neq x_1$. Por ejemplo, consideremos la ecuación $x_{t+1} = f(x_t) = 1 - x_t^2$. Es claro que un ciclo de periodo 2 corresponde a un punto fijo de la composición $f \circ f$, esto es, debe satisfacer $f(f(x^*)) = x^*$. En nuestro ejemplo,

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(1-x^2) \\ &= 1-(1-x^2)^2 \\ &= 2x^2 - x^4. \end{aligned}$$

Debemos entonces resolver la ecuación

$$2x^2 - x^4 = x$$

que se reduce a

$$x^4 - 2x^2 + x = 0.$$

Esta es una ecuación de cuarto grado, pero factorizando la x tenemos que

$$x(x^3 - 2x + 1) = 0.$$

De aquí vemos que $x = 0$ es una solución. Como $f(0) = 1$, entonces $x = 1$ es otra solución. Dividiendo $x^3 - 2x + 1$ por $x - 1$ vemos que

$$x^4 - 2x^2 + x = x(x-1)(x^2 + x - 1).$$

Ahora sí podemos encontrar que las cuatro raíces de $x^4 - 2x^2 + x = 0$ son

$$0, \quad 1, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Es fácil ver que las dos primeras forman un ciclo de periodo 2. Podríamos pensar que entonces las otras dos forman otro ciclo de periodo 2, pero esto no necesariamente es cierto. De hecho, los puntos fijos de f son necesariamente también puntos fijos de $f \circ f$. Esto es lo que sucede en este ejemplo ya que las soluciones de

$$1 - x^2 = x$$

son $(-1 + \sqrt{5})/2$ y $(-1 - \sqrt{5})/2$. Así, sólo hay un ciclo de periodo dos, el formado por $\{0, 1\}$.

Una primera moraleja es que indudablemente resulta difícil desde el punto de vista algebraico encontrar las soluciones cíclicas de una ecuación autónoma. Otra moraleja más positiva es que si conocemos los puntos fijos de f podemos simplificar el cálculo de los puntos fijos de $f \circ f$. Dicho de otra forma, los puntos fijos de f satisfacen la ecuación $1 - x^2 = x$, que equivale a $x^2 + x - 1 = 0$. Podríamos haber entonces dividido $x^4 - 2x^2 + x$ por $x^2 + x - 1$ para factorizar $x^4 - 2x^2 + x$ y simplificar la ecuación $x^4 - 2x^2 + x = 0$ como $(x^2 - x)(x^2 + x - 1) = 0$ que es más fácil de resolver que la ecuación de grado cuatro original.

Un ciclo $\{x_0^*, x_1^*\}$ estable o **atractor** es aquél para el cual una pequeña desviación de la condición inicial x_0^* produce una solución $x_0, x_1, ...x_t, ...$ tal que $x_0, x_2, x_4, ...$ tiende a x_0^*, mientras que $x_1, x_3, x_5, ...$ tiende a x_1^*. De forma análoga se dice que el ciclo es inestable o **repulsor** si al apartarnos un un poco de la condición inicial la solución se aleja cada vez más del ciclo. Si empleamos el teorema anterior para la ecuación $x_{t+1} = f(f(x_t))$ podemos determinar cuándo un ciclo de periodo 2 es estable (atractor) o bien es inestable (repulsor). De hecho, por la regla de la cadena vemos que la derivada de composición $f \circ f$ en x_0^* viene dada por

$$f'(f(x_0^*))f'(x_0^*) = f'(x_1^*)f'(x_0^*),$$

esto es, el producto de las derivadas de f a lo largo del ciclo. Hemos probado entonces

Corollary 4 *Si $\{x_0^*, x_1^*\}$ es un ciclo de periodo 2 de la ecuación autónoma $x_{t+1} = f(x_t)$, entonces;*
i) El ciclo es atractor si $|f'(x_1^*)f'(x_0^*)| < 1$.
ii) El ciclo es repulsor si $|f'(x_1^*)f'(x_0^*)| > 1$.

En el ejemplo anterior se tiene que $f'(x) = -2x$. Por tanto,

$$f'(x_1^*)f'(x_0^*) = f'(1)f'(0) = (-2)(0) = 0$$

de modo que el ciclo es atractor. Por medio de una hoja de cálculo es fácil encontrar algunos valores de las soluciones de esta ecuación sencilla. Si en lugar de $x_0^* = 0$ tomamos $x_0 = 0{,}2$, entonces la solución comienza $x_0 = 0{,}2$, $x_1 = 0{,}96$, $x_2 = 0{,}0784$, $x_3 = 0{,}9939$, $x_4 = 0{,}0123$, $x_5 = 0{,}9998$. Es claro que, como se esperaba, los valores en los periodos pares se van acercando a 0, mientras que los valores en los periodos impares tienden a 1.

1.3. Ecuaciones lineales de segundo orden

Consideremos el siguiente modelo dinámico de ingreso nacional estudiado por P. A. Samuelson. Como es costumbre, denotemos por Y_t al ingreso nacional, por C_t al consumo, por I_t a la inversión y por G_t al gasto público en el periodo t. Los supuestos del modelo son

(a) $Y_t = C_t + I_t + G_t$,

(b) $C_t = \gamma Y_{t-1}$,

(c) $I_t = \alpha(C_t - C_{t-1})$.

La primera ecuación simplemente separa el ingreso en tres rubros: consumo, inversión y gasto público. En la segunda ecuación tenemos que la constante γ representa la propensión marginal al consumo y debe satisfacer entonces $0 < \gamma < 1$. Los economistas se refieren a este supuesto como el **multiplicador**. Finalmente, la tercer ecuación, el **acelerador**, señala que sólo es necesario incrementar la inversión cuando el consumo aumenta. Es importante observar que tanto en la segunda como en la tercera ecuación se relacionan variables de periodos anteriores. Al igual que cuando resolvemos un sistema algebraico de ecuaciones, una buena estrategia es la de reducir el número de variables por medio de sustituciones. Así, al sustituir las relaciones de (b) y (c) en la primera identidad se tiene

$$Y_t = \gamma Y_{t-1} + \alpha(C_t - C_{t-1}) + G_t,$$

que después de volver a emplear (b) y simplificar llegamos a

$$Y_t - \gamma(1+\alpha)Y_{t-1} + \alpha\gamma Y_{t-2} = G_t.$$

Esta ecuación en diferencias es de segundo orden, ya que el valor del ingreso en el periodo t está determinado por el valor del ingreso en los dos periodos anteriores.

En esta sección estudiaremos ecuaciones en diferencias de segundo orden lineales con coeficientes constantes que pueden ser expresadas de la forma

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = c_t.$$

Es fácil verificar que al igual que en el caso de las ecuaciones lineales de primer orden, su solución general resulta ser la suma de la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular. Comencemos entonces analizando la ecuación homogénea

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 0.$$

De nuestra experiencia con ecuaciones de primer grado resulta natural preguntarnos si hay soluciones de la forma $y_t = k\lambda^t$, donde k y λ son constantes convenientes. Esta posible solución debería por tanto satisfacer

$$k\lambda^{t+2} + ak\lambda^{t+1} + bk\lambda^t = 0$$

que después de dividir por $k\lambda^t$ se reduce simplemente a

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Esta es la **ecuación característica** de la ecuación y al polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ se le conoce como **polinomio característico**. Así pues, cuando la ecuación característica tiene dos **raíces características** reales obtenemos dos soluciones de nuestra ecuación en diferencias: λ_1^t y λ_2^t. Más aun, es fácil verificar que cualquier combinación lineal de estas soluciones también es otra solución. Esto significa que ahora la solución general de la ecuación consiste de una familia que depende de dos parámetros, $y_t = m\lambda_1^t + n\lambda_2^t$.

Cuando la ecuación característica tiene sólo una raíz (doble), esto es,

$$\begin{aligned}\lambda^2 + a\lambda + b &= (\lambda - \lambda_1)^2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda_1\lambda + \lambda_1^2\end{aligned}$$

se debe satisfacer que $a = -2\lambda_1$. Es claro que λ_1^t sigue siendo una solución. Podemos verificar asimismo que $t\lambda_1^t$ también es solución ya que

$$\begin{aligned}(t+2)\lambda_1^{t+2} + a(t+1)\lambda_1^{t+1} + bt\lambda_1^t &= \lambda_1^t\left[(t+2)\lambda_1^2 + a(t+1)\lambda_1 + bt\right] \\ &= \lambda_1^t\left[t(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) + \lambda_1(2\lambda_1 + a)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de que, por un lado $\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b = 0$, y por el otro, $a = -2\lambda_1$.

La descripción de las soluciones en el caso de las raíces características complejas resulta un poco más elaborada. Aparecen soluciones complejas cuando al aplicar la fórmula para resolver la ecuación $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ obtenemos números negativos dentro de la raíz, esto es,

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

con $a^2 - 4b < 0$. Para estudiar estas ecuaciones introducimos el número i el cual satisface

$$i^2 = -1.$$

Podemos entonces expresar

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ &= \frac{-a \pm \sqrt{-(4b - a^2)}}{2} \\ &= \frac{-a \pm \sqrt{i^2(4b - a^2)}}{2} \\ &= -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}. \end{aligned}$$

Observemos que ahora la expresión dentro de la raíz $4b - a^2$ resulta positiva. Al término $-a/2$ se le denomina la **parte real** de la raíz, mientras que cualquiera de los términos $\pm i\sqrt{4b - a^2}/2$ son llamados la **parte imaginaria** de la raíz. De esta forma, en este caso la ecuación también tiene dos raíces distintas, ambas con la misma parte real, pero su parte imaginaria difiere por el signo. Por ejemplo, las raíces de

$$\lambda^2 - 4\lambda + 16 = 0$$

vienen dadas por

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{4 \pm \sqrt{16-64}}{2} \\ &= \frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{-48}}{2} \\ &= \frac{4}{2} \pm \frac{i\sqrt{48}}{2} \\ &= 2 \pm i\sqrt{12}.\end{aligned}$$

Si bien la introducción de números complejos nos permite resolver algebraicamente estas ecuaciones, resulta poco útil expresar la solución general de la ecuación $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 0$ de la forma $m(2+i\sqrt{12})^t + n(2-i\sqrt{12})^t$. Uno de los primeros matemáticos en explorar las propiedades de los números complejos fue Leonhard Euler, a cuyo genio debemos el siguiente desarrollo. Recordemos que algunas funciones diferenciables pueden ser descritas por medio de su serie de Taylor. En general, la serie de Taylor de una función (infinitamente diferenciable) en un punto x_0 viene dada por

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots$$

Esta serie es convergente sólo en un intervalo con centro en x_0 y en él la serie coincide con la función. En el caso de la función exponencial y de las funciones trigonométricas seno y coseno este intervalo de convergencia es todo $\mathbb{R}$. Podemos entonces elegir como $x_0 = 0$ y aprovechar que las derivadas de estas funciones evaluadas en 0 resultan muy fáciles de calcular. Por tanto,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots,$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

y

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

Euler consideró entonces la serie de Taylor para la función e^{ix} :

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \cdots,$$

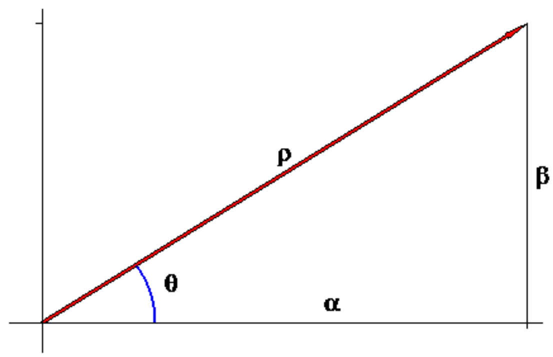
pero como $i^2 = -1$, se tiene que las potencias de i se alternan de la forma $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, etc. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - i\frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) \\ &= \cos(x) + i\text{sen}(x). \end{aligned}$$

Necesitamos de un último ingrediente para estudiar las potencias de un número complejo. Si identificamos geométricamente el número complejo $\lambda = \alpha + i\beta$ como el punto del plano con coordenadas (α, β) los numeros de la forma $\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$ parametrizan los puntos del círculo unitario con centro en el origen. Así, escogiendo θ convenientemente tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha + i\beta \\ &= \rho(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \\ &= \rho e^{i\theta}, \end{aligned}$$

donde ρ es la magnitud del vector (α, β), esto es, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ y $\cos(\theta) = a/\rho$.



Por ejemplo, si $\lambda = 2 + i\sqrt{12}$, entonces

$$\rho = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{12}\right)^2} = 4,$$

así que θ debe satisfacer

$$\cos\theta = \frac{2}{4}.$$

Luego,

$$\theta = \arc\cos(0{,}5) = \frac{\pi}{3}$$

y podemos entonces expresar

$$\begin{aligned}\lambda &= 2 + i\sqrt{12} \\ &= 4(\cos(\pi/3) + i\mathrm{sen}(\pi/3)) \\ &= 4e^{i\pi/3}.\end{aligned}$$

La gran ventaja de expresar el número complejo de la forma $\rho e^{i\theta}$ es que entonces sus potencias se pueden calcular fácilmente:

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^t = \rho^t \left(e^{i\theta}\right)^t = \rho^t e^{i\theta t}.$$

Veamos ahora cómo podemos emplear estas fórmulas para obtener dos soluciones reales asociadas a ecuaciones en diferencias de orden dos cuyo polinomio característico tiene raíces complejas. Consideremos la ecuación $y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 0$ y supongamos que las raíces de su polinomio característico son de la forma $\lambda = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}$ y $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta = \rho e^{-i\theta}$. Entonces,

$$\lambda^t = \rho^t e^{i\theta t} = \rho^t(\cos(\theta t) + i\mathrm{sen}(\theta t))$$

y

$$\overline{\lambda}^t = \rho^t e^{-i\theta t} = \rho^t(\cos(-\theta t) + i\mathrm{sen}(-\theta t)) = \rho^t(\cos(\theta t) - i\mathrm{sen}(-\theta t))$$

son soluciones de la ecuación. De hecho, cualquier combinación lineal de estas soluciones produce otra solución. En particular,

$$\frac{1}{2}(\lambda^t + \overline{\lambda}^t) = \rho^t \cos(\theta t)$$

y

$$\frac{1}{2i}(\lambda^t - \overline{\lambda}^t) = \rho^t \mathrm{sen}(\theta t)$$

son soluciones reales diferentes. La solución general puede por tanto ser expresada por una combinación lineal de este par de soluciones:

$$m\rho^t \cos(\theta t) + n\rho^t \mathrm{sen}(\theta t) = \rho^t(m\cos(\theta t) + n\mathrm{sen}(\theta t)).$$

El siguiente resultado resume nuestra discusión previa.

Theorem 5 *La solución general de la ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes*

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 0$$

vine dada por

i) $m\lambda_1^t + n\lambda_2^t$ *cuando* λ_1 *y* λ_2 *son dos raíces características reales distintas.*

ii) $m\lambda_1^t + nt\lambda_1^t$ *cuando* λ_1 *es una raíz característica real doble.*

iii) $\rho^t(m\cos(\theta t) + n\ sen(\theta t))$ *cuando se tienen raíces características complejas* $\lambda = \alpha \pm i\beta$*, donde*

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad y \quad \cos(\theta) = \alpha/\rho.$$

Las soluciones particulares pueden obtenerse por medio del método de coeficientes indeterminados. El caso más sencillo es el de $y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t = c$, con c una constante. La solución propuesta es entonces una constante k. Ésta debe satisfacer

$$k + ak + bk = c,$$

de modo que

$$k = \frac{c}{1 + a + b}.$$

Esta es la solución estacionaria o estado estacionario de la ecuación. por supuesto que se requiere que $1 + a + b \neq 0$. Cuando $1 + a + b = 0$ debemos considerar soluciones del tipo kt o si fuese necesario de la forma kt^2. Las constantes m y n dependen de condiciones iniciales o terminales como se muestra en los ejemplos siguientes.

(a) Consideremos primero la ecuación $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$, con $y_0 = 4$, $y_1 = 5$.

En este caso no es posible encontrar una solución particular constante ya que $1 + a + b = 1 + 1 - 2 = 0$. Tratamos entonces una solución de la forma kt. Esta solución debe cumplir con

$$\begin{aligned} k(t+2) + k(t+1) - 2kt &= 12 \\ 3k &= 12 \end{aligned}$$

por lo que la solución particualr sencilla es $y_t^p = 4t$. La ecuación cacarterística es $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$, así que sus raíces son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 1$.

La solución general es por tanto $y_t = m2^t + n1^t + 4t = m(-2)^t + 4t + n$. De las condiciones iniciales vemos que

$$\begin{aligned} m + n &= 4 \\ -2m + n + 4 &= 5 \end{aligned}$$

de donde se obtiene $m = 1$ y $n = 3$. La solución buscada es por tanto

$$y_t = (-2)^t + 4t + 3.$$

(b) La solución estacionaria para la ecuación $x_{t+2} - x_{t+1} + 2x_t = 4$ viene dada por $k = 4/(1 - 1 + 2) = 2$. La ecuación característica es ahora $\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ Como no es claro cómo factorizar esta expresión empleamos la fórmula cuadrática para ver que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

Como las raíces son complejas tenemos que

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \text{ y } \cos(\theta) = \frac{(1/2)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

De la última ecuación vemos que

$$\theta = \arccos(1/2\sqrt{2}) = 1{,}2094,$$

así que la solución general es

$$\begin{aligned} x_t &= \rho^t(m\cos(\theta t) + n\mathrm{sen}(\theta t)) + y_t^p \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^t (m\cos(1{,}2094t) + n\mathrm{sen}(1{,}2094t)) + 2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones en diferencias pueden ser utilizadas en una multitud de problemas como a continuación ejemplificamos.

Example 6 *¿Quieres ser millonario? (Slumdog millionaire)*

Se tiene un programa de televisión donde hay un premio de N mil libras esterlinas. El concursante debe responder una serie de preguntas. Las reglas del juego son las siguientes. Cada respuesta acertada incrementa su bolsa con mil libras, mientras que cada respuesta errónea disminuye su bolsa en mil libras. Si el concursante pierde todo el dinero de su bolsa, entonces debe retirarse sin haber ganado nada. Por otro lado, si el concursante logra acumular el total de las N mil libras, entonces se retira habiendo ganado esta cantidad. Si al finalizar la transmisión del programa el concursante tiene acumulada una bolsa de k mil libras, entonces el entrevistador abre un sobre y lee una cantidad. El concursante puede entonces elegir continuar participando en el concurso durante la siguiente transmisión, empezando desde luego con su bolsa de k mil libras, o bien, aceptar la cantidad que el entrevistador leyó del sobre. ¿Qué decisión debe tomar un jugador al finalizar el programa?

El concursante debe evaluar cuál es su utilidad esperada si continúa en el juego y compararla con la cantidad que el entrevistador le ofrece. Supongamos que el concursante contesta de manera correcta a las preguntas que se le hacen con probabilidad $p > 0$. Denotemos por P_k a la probabilidad de que el concursante gane el total de N mil libras cuando ha acumulado k mil libras. Esta probabilidad sólo depende de la cantidad acumulada en la bolsa, y no de cuántas preguntas le tomo al concursante llegar a esta suma acumulada. Observemos por tanto que después de aceptar una nueva pregunta, con probabilidad p tendrá $k+1$ mil libras, y con probabilidad $1-p$ tendrá $k-1$ mil libras. Esta observación simple da origen a la ecuación en diferencias

$$P_k = pP_{k+1} + (1-p)P_{k-1}$$

que podemos reescribir como

$$pP_{k+1} - P_k + (1-p)P_{k-1} = 0.$$

Por las reglas del juego se tiene que $P_0 = 0$ y $P_N = 1$. La ecuación característica $p\lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$ tiene como raíces a

$$\lambda_1 = \frac{1-p}{p} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1.$$

Si $p \neq 1/2$ la solución general es

$$P_k = m\left(\frac{1-p}{p}\right)^k + n.$$

A partir de las condiciones $P_0 = 0$ y $P_N = 1$ se deduce que

$$m = \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} \quad \text{y} \quad n = -\frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1},$$

para obtener finalmente

$$P_k = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}.$$

La utilidad esperada de continuar jugando durante el siguiente programa es por tanto

$$U_k = 1000N\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}.$$

El concursante debe participar en el siguiente programa sólo cuando la cantidad que le ofrecen por retirarse es menor a este valor. Para ejemplificar este cálculo consideremos el caso de cuando $N = 10$, y el concursante, de nombre Jamal, dista mucho de tener un conocimiento enciclopédico, digamos que $p = 1/3$. Sin embargo, por una racha de suerte ha acumulado nueve mil libras. Si le ofrecen cinco mil libras por retirarse ¿debe aceptarlas? La probabilidad de que llegue a ganar las diez mil libras es

$$P_9 = \frac{\left(\frac{2/3}{1/3}\right)^9 - 1}{\left(\frac{2/3}{1/3}\right)^{10} - 1} = 0{,}4995,$$

de modo que su utilidad esperada por continuar participando sería de $0{,}4995(10000) = 4995$ libras. Jamal debería por tanto aceptar la oferta de las 5000 libras y retirarse, pero éste sería otro final.

Retomemos de nuevo el modelo de Samuelson de crecimiento económico con el que iniciamos esta sección. Recordemos que viene dado por

$$Y_t - \gamma(1+\alpha)Y_{t-1} + \alpha\gamma Y_{t-2} = G_t.$$

Si consideramos el caso donde $\gamma = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}5$ y el gasto público crece a una tasa del 3 % anual, esto es, $G_t = G_0(1{,}03)^t$. La ecuación que se obtiene es

$$Y_t - 1{,}35Y_{t-1} + 0{,}45Y_{t-2} = G_0(1{,}03)^t.$$

Para buscar una solución particular es razonable suponer $Y_t^p = A(1{,}03)^t$. Sustituyendo tenemos

$$A(1{,}03)^t - 1{,}35A(1{,}03)^{t-1} + 0{,}45A(1{,}03)^{t-2} = G_0(1{,}03)^t$$

que simplificamos dividiendo por $(1{,}03)^{t-2}$. De este modo, al despejar A de

$$A(1{,}03)^2 - 1{,}35A(1{,}03) + 0{,}45A = G_0(1{,}03)^2$$

obtenemos

$$A = 8{,}81G_0.$$

Por otro lado, la ecuación característica es $\lambda^2 - 1{,}35\lambda + 0{,}45 = 0$ cuyas raíces son $\lambda_1 = 0{,}75$ y $\lambda_2 = 0{,}6$. Por tanto, la solución general de la ecuación viene dada por

$$\begin{aligned} Y_t &= m(0{,}75)^t + n(0{,}6)^t + 8{,}81G_0(1{,}03)^t \\ &= m(0{,}75)^t + n(0{,}6)^t + 8{,}81G_t. \end{aligned}$$

Observemos que en el largo plazo la parte de la solución correspondiente a la solución de la ecuación homogénea tiende a 0, así que

$$\lim_{t\to\infty} Y_t = 8{,}81G_t.$$

Por lo tanto, si t es grande se tiene

$$\frac{G_t}{Y_t} \approx \frac{1}{8{,}81} = 0{,}1135.$$

En el largo plazo el gasto público representa por tanto el 11.35 % del ingreso nacional.

Consideremos de nuevo ecuaciones del tipo $y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = c$. Al igual que en el caso de ecuaciones de primer orden resulta importante determinar cuándo la solución estacionaria es estable. Analicemos el caso de las soluciones reales primero. Al contemplar la forma de las soluciones dadas por el teorema anterior es inmediato que se requiere que $|\lambda_i| < 1$. Recordemos que λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$. Su gráfica es una parábola que abre hacia arriba. La condición $|\lambda_i| < 1$ equivale a que la gráfica de p cruza al eje horizontal en uno o dos puntos que están entre -1 y 1. Es claro que si las raíces se encuentran en este intervalo entonces $p(1)$ y $p(-1)$ deben ser ambos positivos, esto es,

$$1 + a + b > 0 \text{ y } 1 - a + b > 0$$

que equivale a

$$|a| < 1 + b.$$

Esta condición no es suficiente para garantizar que las raíces se encuentran en $(-1, 1)$. Podría suceder que ambas raíces fuesen mayores a 1, o bien, ambas menores a -1, ya que en estos dos casos $p(1)$ y $p(-1)$ resultan ambos positivos. Sin embargo, el producto de las raíces $\lambda_1\lambda_2$ sería en ambos casos mayor a 1. La otra condición que se requiere es entonces que $\lambda_1\lambda_2 < 1$. De la igualdad

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

vemos que $\lambda_1\lambda_2 = b$.

En el caso de las raíces complejas la gráfica del polinomio característico es una parábola que está totalmente por arriba del eje horizontal. Por la forma de la solución se desprende que ésta es estable cuando $\rho < 1$. Como además

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{ y } \alpha + i\beta = -\frac{a}{2} + \frac{i\sqrt{4b - a^2}}{2},$$

se tiene que

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4b - a^2}{4}} = \sqrt{b}.$$

Esto significa que en el caso complejo la estabilidad sólo depende de que $b < 1$. Hemos probado entonces

Theorem 7 *La solución estacionaria $c/(1 + a + b)$ asociada a la ecuación $y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = c$ es estable si y sólo si se satisfacen las desigualdades $|a| < 1 + b$ y $b < 1$.*

Cuando la ecuación no tiene soluciones estacionarias ya sea porque $1 + a + b = 0$, o bien, el término independiente c_t no es constante, el teorema brinda información del comportamiento de las soluciones en el largo plazo. Con el ejemplo del modelo de Samuelson podemos ilustrar esto. La ecuación a analizar es

$$Y_t - 1{,}35Y_{t-1} + 0{,}45Y_{t-2} = G_0(1{,}03)^t,$$

de modo que $a = -1{,}35$ y $b = 0{,}45$. Como

$$|a| = 1{,}35 < 1{,}45 = 1 + b \;\; \text{y} \;\; b = 0{,}45 < 1$$

sabemos que cualquier solución debe converger a la solución particular $8{,}81G_0(1{,}03)^t$.

¿Son las soluciones de del modelo de Samuelson siempre estables? La ecuación asociada es

$$Y_t - \gamma(1+\alpha)Y_{t-1} + \alpha\gamma Y_{t-2} = G_t.$$

De acuerdo al resultado anterior el modelo será estable cuando

$$|-\gamma(1+\alpha)| < 1 + \alpha\gamma \;\; \text{y} \;\; \alpha\gamma < 1.$$

La primera desigualdad se reduce a $\gamma < 1$, lo cual siempre se cumple puesto que γ es la propensión marginal al consumo. El modelo es por tanto estable cuando $\gamma < 1/\alpha$. Por otro lado, de la fórmula de la ecuación cuadrática se tiene

$$\lambda = \frac{\gamma(1+\alpha) \pm \sqrt{\gamma^2(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma}}{2},$$

por lo que las raíces son complejas cuando $\gamma^2(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma < 0$, esto es,

$$\gamma < \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}.$$

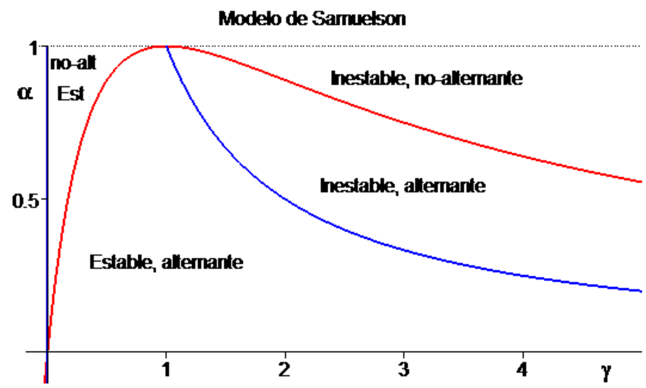
En resumen, las soluciones estables corresponden a los casos donde el punto (α, γ) se encuentra bajo la hipérbola

$$\gamma = \frac{1}{\alpha}.$$

El modelo presenta comportamiento alternante cuando (α, γ) cae bajo la curva

$$\gamma = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}.$$

En la siguiente figura se ilustran los cuatro casos genéricos.



1.4. Sistemas de ecuaciones en diferencias

Los sistemas de ecuaciones en diferencias aparecen en modelos donde dos o más variables endógenas interactúan a lo largo del tiempo. Consideremos el caso de un modelo macroeconómico para el cual se tiene

$$\begin{aligned} Y_t &= aY_{t-1} + bP_{t-1} + G_t \\ P_t &= cY_{t-1} + dP_{t-1} + M_t \end{aligned}$$

donde Y denota el ingreso nacional, P el nivel de precios, G el gasto público y M la oferta monetaria. Empleando notación matricial es posible expresar este sistema como

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_t + \mathbf{B}_t,$$

en donde claramente

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} Y_t \\ P_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} G_t \\ M_t \end{pmatrix}.$$

Como en el caso de las ecuaciones lineales es fácil establecer que la solución general de uno de estos sistemas se puede descomponer en la suma de una solución particular y de la solución general del sistema homogéneo asociado. Comencemos entonces estudiando las soluciones de sistemas homogéneos. Por simplicidad trataremos únicamente el caso de sistemas de dos variables, pero los métodos que aquí desarrollaremos pueden ser fácilmente generalizados a dimensiones mayores.

Consideremos entonces la ecuación

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_t$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz de tamaño 2×2. A una matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

se le asocian dos invariantes, el determinante det $= ad - bc$ y la traza tr $= a + d$. Estos invariantes aparecen en el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ que viene dado por

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \mathrm{tr}\lambda + \det . \end{aligned}$$

Los valores propios son así las raíces de este polinomio y pueden calcularse por

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr} \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2 - 4\det}}{2}.$$

Supongamos primero que $\mathbf{A}$ tiene dos valores propios reales diferentes λ_1 y λ_2. Entonces si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios asociados a estos valores propios sabemos que deben ser linealmente independientes y forman por lo tanto una base de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{X}_{0,} \mathbf{X}_{1,\ldots,} \mathbf{X}_{t,\ldots}$ es una solución de la ecuación, existen por tanto escalares α_t y β_t tales que

$$\mathbf{X}_t = \alpha_t \mathbf{v}_1 + \beta_t \mathbf{v}_2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \alpha_{t+1}\mathbf{v}_1 + \beta_{t+1}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{X}_{t+1} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{X}_t \\ &= \mathbf{A}(\alpha_t \mathbf{v}_1 + \beta_t \mathbf{v}_2) \\ &= \alpha_t \mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \beta_t \mathbf{A}\mathbf{v}_2 \\ &= \lambda_1 \alpha_t \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \beta_t \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Como los vectores se expresan en forma única como combinaciones lineales de una base se deduce que

$$\alpha_{t+1} = \lambda_1 \alpha_t \ \text{ y } \ \beta_{t+1} = \lambda_2 \beta_t.$$

La solución de estas dos ecuaciones viene dada por

$$\alpha_t = m\lambda_1^t \ \text{ y } \ \beta_t = n\lambda_2^t$$

para dos constantes que dependen de $\mathbf{X}_0$. Por tanto hemos probado que

$$\mathbf{X}_t = m\lambda_1^t \mathbf{v}_1 + n\lambda_2^t \mathbf{v}_2.$$

Para ejemplificar consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 2x_t + 3y_t \\ y_{t+1} &= 2x_t + y_t. \end{aligned}$$

La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y la ecuación característica viene dada por $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, por lo que es claro que los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$. Como vectores propios asociados estos valores propios podemos elegir a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistemas es por tanto

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = m(-1)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + n4^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

que puede ser expresada también de la forma

$$\begin{aligned} x_t &= m(-1)^t + 3n4^t \\ y_t &= -m(-1)^t + 2n4^t \end{aligned}$$

Las constantes m y n pueden ser determinadas si se tienen condiciones iniciales. Digamos que $x_0 = 5$ y también $y_0 = 5$. Al sustituir estos valores en el sistema de ecuaciones anterior se llega a

$$\begin{aligned} m + 3n &= 5 \\ -m + 2n &= 5 \end{aligned}$$

cuya solución es $m = -1$ y $n = 2$. La solución particular determinada por estas condiciones iniciales es entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} &= -(-1)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2(4^t) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2(4^t) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos aplicar estas ideas para estudiar el caso de los valores propios complejos. Los valores propios son complejos entonces cuando $\mathrm{tr}^2 - 4\det < 0$. Los valores propios

$$\lambda = \alpha + i\beta \ \text{ y } \ \overline{\lambda} = \alpha - i\beta.$$

vienen dados en este caso por

$$\alpha = \frac{\mathrm{tr}}{2} \ \text{ y } \ \beta = \frac{\sqrt{4\det - \mathrm{tr}^2}}{2}.$$

Supongamos que v es un vector propio asociado a λ. Es fácil verificar que la sucesión de vectores $\lambda^t\mathbf{v}$ es una solución de la ecuación ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\lambda^t\mathbf{v} &= \lambda^t\mathbf{A}\mathbf{v} \\ &= \lambda^t\lambda\mathbf{v} \\ &= \lambda^{t+1}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Sin embargo, esta solución tiene el inconveniente de estar expresada por medio de vectores con entradas complejas. Si descomponemos al vector propio $\mathbf{v}$ en su parte real y su parte imaginaria, esto es, $\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$, y denotamos por $\overline{\mathbf{v}}$ al vector $\mathbf{r} - i\mathbf{s}$, es inmediato verificar que $\overline{\mathbf{v}}$ es un vector propio asociado al otro valor propio $\overline{\lambda}$. Si ahora empleamos la fórmula de Euler y escribimos

$$\lambda = \rho(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)),$$

podemos proceder como en el caso de las ecuaciones de segundo orden y encontrar un par de soluciones reales a la ecuación:

$$\frac{1}{2}(\lambda^t \mathbf{v} + \overline{\lambda}^t \overline{\mathbf{v}}) = \rho^t(\cos(\theta t)\mathbf{r} - \operatorname{sen}(\theta t)\mathbf{s})$$

y

$$\frac{1}{2i}(\lambda^t \mathbf{v} - \overline{\lambda}^t \overline{\mathbf{v}}) = \rho^t(\operatorname{sen}(\theta t)\mathbf{r} + \cos(\theta t)\mathbf{s}).$$

Es fácil verificar que ρ y θ pueden ser caracterizados por

$$\rho = \sqrt{\det} \quad \text{y} \quad \cos(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\det}}.$$

Estas soluciones resultan linealmente independientes y por tanto la solución general es una combinación lineal de ellas

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= m\rho^t(\cos(\theta t)\mathbf{r} - \operatorname{sen}(\theta t)\mathbf{s}) + n\rho^t(\operatorname{sen}(\theta t)\mathbf{r} + \cos(\theta t)\mathbf{s}) \\ &= \rho^t(m\cos(\theta t) + n\operatorname{sen}(\theta t))\mathbf{r} + \rho^t(n\cos(\theta t) - m\operatorname{sen}(\theta t))\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Veamos que a pesar de que a primera vista parece muy elaborado tratar con números complejos, la aplicación de las fórmulas es relativamente sencilla. Para encontrar un vector propio conviene emplear un truco sencillo que de hecho puede emplearse tanto para valores propios reales como complejos. Si la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tiene a λ_1 como vector propio y la entrada $b \neq 0$, entonces debemos encontrar las soluciones del sistema homogéneo

$$\left(\begin{array}{cc|c} a-\lambda_1 & b & 0 \\ c & d-\lambda_1 & 0 \end{array}\right)$$

que por tratarse de un vector propio debe ser equivalente a

$$\left(\begin{array}{cc|c} a-\lambda_1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Las soluciones de este sistema coinciden con las soluciones de la ecuación $(a-\lambda_1)x+by=0$, que podemos reescribir como

$$y=\frac{(\lambda_1-a)}{b}x.$$

Esto implica que los diferentes vectores propios se obtienen asignando a la variable x valores arbitrarios diferentes de cero. En particular, si $x=b$, entonces $y=\lambda_1-a$, de modo que

$$\begin{pmatrix} b \\ \lambda_1-a \end{pmatrix}$$

es un vector propio de valor propio λ_1. Cuando $b=0$, pero $c\neq 0$, un argumento análogo produce el vector propio

$$\begin{pmatrix} \lambda_1-d \\ c \end{pmatrix}.$$

Ahora sí podemos estudiar el sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 6x_t-y_t \\ y_{t+1} &= 5x_t+4y_t \end{aligned}$$

que equivale en notación matricial a

$$\mathbf{X}_{t+1}=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}_t.$$

La ecuación característica viene dada por $\lambda^2-10\lambda+29=0$. Al resolver esta ecuación nos encontramos con que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{10\pm\sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{10\pm i\sqrt{16}}{2} \\ &= 5\pm 2i. \end{aligned}$$

La entrada $b = -1$ por lo que podemos encontrar un vector propio

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 + 2i - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 + 2i \end{pmatrix}$$

Al descomponer este vector en su parte real y su parte imaginaria tenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 + 2i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{r} + i\mathbf{s}. \end{aligned}$$

es un vector propio. Para aplicar la fórmula debemos determinar los valores de ρ y de θ. El primero es muy fácil ya que $\rho = \sqrt{\det} = \sqrt{29}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\det}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) \\ &= 0{,}38. \end{aligned}$$

De esta forma podemos entonces expresar la solución general como

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \rho^t(m\cos(\theta t) + n\,\mathrm{sen}(\theta t))\mathbf{r} + \rho^t(n\cos(\theta t) - m\,\mathrm{sen}(\theta t))\mathbf{s} \\ &= \left(\sqrt{29}\right)^t (m\cos(0{,}38t) + n\,\mathrm{sen}(0{,}38t)) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(\sqrt{29}\right)^t (n\cos(0{,}38t) - m\,\mathrm{sen}(0{,}38t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\sqrt{29}\right)^t \begin{pmatrix} -m\cos(0{,}38t) - n\,\mathrm{sen}(0{,}38t) \\ (2n - m)\cos(0{,}38t) - (n + 2m)\,\mathrm{sen}(0{,}38t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los valores de m y n dependen de nuevo de condiciones iniciales y se pueden determinar fácilmente.

El análisis del caso de los valores propios dobles es más delicado. Supongamos que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

asociada al sistema homogéneo $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_t$ tiene a λ_1 como valor propio repetido. Esto sucede cuando el polinomio característico se factoriza como

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) &= (\lambda - \lambda_1)^2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda_1\lambda + \lambda_1^2. \end{aligned}$$

De aquí se deduce entonces que

$$\lambda_1 = \frac{a+d}{2} \text{ y } \lambda_1^2 = ad - bc.$$

Supongamos primero que $b \neq 0$. Ya observamos previamente que entonces el vector

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado al valor λ_1. Al sustituir $\lambda_1 = (a+d)/2$ se obtiene

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{a+d}{2} - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}.$$

Cuando obtuvimos la solución de un sistema homogéneo con valores propios reales diferentes empleamos el hecho que los vectores propios asocados son linealmente independientes. Como ahora sólo tenemos un vector propio, es necesario introducir otro vector linealmente independiente para expresar las soluciones como combinaciones lineales. Un vector sencillo apropiado es

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $b \neq 0$, es claro que $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ forman un conjunto linealmente independiente y por tanto una base de $\mathbb{R}^2$. Además,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{w} &= \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b \\ \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d+a}{2} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{v} + \lambda_1 \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Ahora podemos expresar la solución $\mathbf{X}_t$ de la ecuación $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_t$ como una combinación lineal

$$\mathbf{X}_t = \alpha_t \mathbf{v} + \beta_t \mathbf{w}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\alpha_{t+1}\mathbf{v} + \beta_{t+1}\mathbf{w} &= \mathbf{A}(\alpha_t \mathbf{v} + \beta_t \mathbf{w}) \\
&= \alpha_t \mathbf{A}\mathbf{v} + \beta_t \mathbf{A}\mathbf{w} \\
&= \alpha_t \lambda_1 \mathbf{v} + \beta_t \left(\mathbf{v} + \lambda_1 \mathbf{w}\right) \\
&= \lambda_1 \alpha_t \mathbf{v} + \beta_t \mathbf{v} + \lambda_1 \beta_t \mathbf{w} \\
&= \left(\lambda_1 \alpha_t + \beta_t\right) \mathbf{v} + \lambda_1 \beta_t \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Usando de nuevo el hecho de que los vectores se expresan en combinaciones lineales únicas de una base podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\alpha_{t+1} &= \lambda_1 \alpha_t + \beta_t \\
\beta_{t+1} &= \lambda_1 \beta_t.
\end{aligned}$$

Parece decepcionante que después de tanto esfuerzo sólo hayamos logrado pasar de un sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo a ¡otro sistema de ecuaciones homogéneo! Sin embargo, es más fácil encontrar la solución del último sistema. De la segunda ecuación se tiene que existe una constante c para la cual

$$\beta_t = c\lambda_1^t.$$

Sustituyendo ahora en la primera ecuación tenemos que

$$\alpha_{t+1} = \lambda_1 \alpha_t + c\lambda_1^t.$$

Para resolver esta ecuación lineal de primer orden proponemos como solución particular una función de la forma $m\lambda_1^t$. Sin embargo, esta solución debería satisfacer

$$m\lambda_1^{t+1} = \lambda_1 m\lambda_1^t + c\lambda_1^t,$$

que se reduce a $0 = c\lambda_1^t$, lo cual no es posible en general. Debemos por tanto buscar soluciones de la forma $mt\lambda_1^t$. Ahora se tiene

$$m(t+1)\lambda_1^{t+1} = \lambda_1 mt\lambda_1^t + c\lambda_1^t$$

que al simplificar produce

$$m = \frac{c}{\lambda_1}.$$

Por lo tanto sabemos que existe otra constante n tal que

$$\alpha_t = n\lambda_1^t + mt\lambda_1^t.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \alpha_t \mathbf{v} + \beta_t \mathbf{w} \\ &= (n\lambda_1^t + mt\lambda_1^t)\mathbf{v} + \left(c\lambda_1^t\right)\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Pero como $c = m\lambda_1$, podemos reescribir la solución como $(n\lambda_1^t + mt\lambda_1^t)\mathbf{v} + \left(m\lambda_1\lambda_1^t\right)\mathbf{w}$, por lo que finalmente se llega a que

$$\mathbf{X}_t = n\lambda_1^t\mathbf{v} + m\lambda_1^t(t\mathbf{v} + \lambda_1\mathbf{w}).$$

Cuando la entrada de la matriz $b = 0$, pero $c \neq 0$ se tiene un resultado idéntico empleando

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación mostramos un ejemplo de este último caso. La matriz asociada al sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - y_t \\ y_{t+1} &= x_t + 3y_t \end{aligned}$$

es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ de modo que $\lambda = 2$ es un valor propio doble. En este caso

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

así que de acuerdo con la fórmula anterior, la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= n\lambda_1^t \mathbf{v} + m\lambda_1^t (t\mathbf{v} + \lambda_1 \mathbf{w}) \\ &= n2^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + m2^t \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -n2^t - mt2^t \\ n2^t + mt2^t + 2m2^t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_t &= -n2^t - mt2^t \\ y_t &= n2^t + mt2^t + 2m2^t. \end{aligned}$$

Conviene resumir estos resultados en el siguiente teorema.

Theorem 8 *La solución general del sistema de ecuaciones* $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_t$ *está dada por*

i) $m\lambda_1^t \mathbf{v}_1 + n\lambda_2^t \mathbf{v}_2$ *cuando* λ_1 *y* λ_2 *son valores propios reales distintos.*

ii) $\left(\sqrt{\det}\right)^t (m\cos(\theta t) + n\, sen(\theta t))\mathbf{r} + \rho^t (n\cos(\theta t) - m\, sen(\theta t))\mathbf{s}$ *cuando se tienen valores propios complejos* $\lambda = \alpha \pm i\beta$, *donde el vector propio* $\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$ *y*

$$\cos(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\det}}.$$

iii) $n\lambda_1^t \mathbf{v} + m\lambda_1^t (t\mathbf{v} + \lambda_1 \mathbf{w})$ *cuando* λ_1 *es una raíz característica real doble. Aquí*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad si\ b \neq 0,$$

o bien,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{si} \quad c \neq 0.$$

Consideremos finalmente el caso de sistemas no-homgéneos. Ya mencionamos que al igual que para las ecuaciones lineales, la solución general de estos sistemas se descompone en la suma de una solución particular más la solución general del sistema homogéno asociado. El tipo más sencillo de este tipo de ecuaciones se presenta cuando el término no-homogéneo viene dado por un vector constante, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

El tipo de solución particular más simple que podemos esperar es también el de una solución constante, digamos

$$\begin{pmatrix} x_t^p \\ y_t^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}.$$

Esta solución debe satisfacer

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

que podemos reescribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

que a su vez equivale al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ 2 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

que una vez que simplificamos produce

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

cuya solución es

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, previamente analizamos el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

y vimos que su solución general es

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = m(-1)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + n4^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

así que la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

está dada por

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = m(-1)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + n4^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

¿Cuándo la solucion estacionaria es estable? De las fórmulas del teorema anterior se desprende que basta que los valores propios satisfagan $|\lambda_i| < 1$ cuando son reales, o bien, $\det < 1$ en el caso complejo. Estas desigualdades son semejantes a las condiciones de estabilidad para ecuaciones lineales de segundo orden. El siguiente resultado es consecuencia del teorema 7.

Corollary 9 *La solución estacionaria asociada a la ecuación*

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_t + \mathbf{B}$$

es estable si y sólo si $|tr| < 1 + \det$ *y* $\det < 1$.

Es claro que la solución del ejemplo anterior no es estable. Al menos una de las dos desigualdades del corolario debe violarse. De hecho, no se satisface $|\mathrm{tr}| < 1 + \det$ ya que

$$\mathrm{tr} = 3 \ \text{ y } \ 1 + \det = 1 - 4.$$

Example 10 *Modelo de comercio exterior*

Consideremos un modelo de comercio entre dos naciones. Para cada país el ingreso nacional y_t^i se descompone como la suma del consumo c_t^i, la inversión i_t^i y las exportaciones x_t^i, menos las importaciones m_t^i. Denotamos al consumo doméstico d_t^i. Supondremos además que el consumo doméstico y las importaciones en un periodo son proporcionales al ingreso nacional del periodo anterior. Así, para el país i se tiene

$$\begin{aligned}
y_t^i &= c_t^i + i_t^i + x_t^i - m_t^i \\
d_t^i &= c_t^i - m_t^i \\
d_{t+1}^i &= a_{ii} y_t^i \\
m_{t+1}^i &= a_{ji} y_t^i.
\end{aligned}$$

Las constantes a_{ii} y a_{ji} son las propensiones marginales al consumo doméstico y a las importaciones y por lo tanto podemos suponeer que son positivas. Si el único comercio que realizan las naciones es exclusivamente entre ellas se tiene que $m_t^i = x_t^j$. De esta forma la primera ecuación puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
y_{t+1}^i &= d_{t+1}^i + i_{t+1}^i + x_{t+1}^i \\
&= d_{t+1}^i + i_{t+1}^i + m_{t+1}^j \\
&= a_{ii} y_t^i + a_{ij} y_t^j + i_{t+1}^i
\end{aligned}$$

de modo que al considerar las dos naciones se llega al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_{t+1}^1 &= a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + i_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 &= a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + i_{t+1}^2 \end{aligned}$$

que en notación matricial se expresa como

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{t+1}^1 \\ i_{t+1}^2 \end{pmatrix}.$$

Si además suponemos que la inversión se mantiene constante en ambas naciones a lo largo del tiempo, se llega al sistema

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}.$$

Como en el ejemplo anterior buscamos una solución particular constante

$$\begin{pmatrix} f_t^1 \\ f_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix},$$

esto es, un vector que satisfaga

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que se reduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^1 \\ -i^2 \end{pmatrix}$$

de modo que si la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{pmatrix}$$

es no-singular el sistema tiene una única solución

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -i^1 \\ -i^2 \end{pmatrix}.$$

Para mantener una economía estable es razonable suponer que la suma del consumo doméstico y las importaciones en cada periodo son menores al ingreso del periodo previo, esto es,

$$d^i_{t+1} + m^i_{t+1} < y^i_t,$$

o bien,

$$a_{11} + a_{21} < 1 \ \text{ y } \ a_{22} + a_{12} < 1.$$

En la siguiente proposición demostramos que estas desigualdades nos permiten deducir que los valores propios satisfacen $|\lambda_j| < 1$. En otras palabras, la solución estacionaria resulta siempre estable.

Proposition 11 *Sea*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz con entradas positivas tales que $a+c<1$ y $b+d<1$. Entonces sus valores propios λ_i son reales y además $|\lambda_i| < 1$.

Para demostrar primero que los valores propios son reales basta con observar que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\mathrm{tr} \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2 - 4\det}}{2} \\ &= \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \\ &= \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el valor propio

$$\lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}.$$

Es claro que $\lambda_1 > 0$ y que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Sea

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

un vector propio de valor propio λ_1. Entonces

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \lambda_1 x_1 \\ cx_1 + dx_2 &= \lambda_1 x_2 \end{aligned}$$

De la primera ecuación vemos que si $x_1 = 0$, entonces también se tendría que $x_2 = 0$. Asimismo, empleando la segunda ecuación se tiene que $x_2 = 0$ implicaría $x_1 = 0$. Puesto que los vectores propios son no-nulos vemos que tanto x_1 como x_2 son ambos diferentes de cero. Multiplicando por un escalar conveniente podemos suponer que el vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a + bx_2 &= \lambda_1 \\ c + dx_2 &= \lambda_1 x_2 \end{aligned}$$

Despejando x_2 de estas ecuaciones se tiene que

$$x_2 = \frac{\lambda_1 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_1 - d}.$$

Veamos ahora que necesariamente x_2 es positivo, puesto que si no lo fuese, de las ecuaciones anteriores deducidiríamos que $\lambda_1 < a$ y $\lambda_1 < d$. Sin embargo, esto nos llevaría a que

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &< a + d \\ &= \text{traza} \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ &< 2\lambda_1 \end{aligned}$$

lo cual no es posible. Sumando las ecuaciones se tiene

$$(a+c)+(b+d)x_2 = \lambda_1(1+x_2).$$

Pero como por hipótesis $a+c<1$ y $b+d<1$ se sigue ahora que

$$1+x_2 > \lambda_1(1+x_2),$$

así que al dividir por $1+x_2$ se llega finalmente a que $\lambda_1 < 1$.

1.5. Ejercicios

1. ¿Cuál es el apellido y profesión de Doña Gamucita? ¿Tiene hijos Doña Gamucita?

2. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones en diferencias y analiza su comportamiento a largo plazo (convergente, divergente, oscilante, no-oscilante).

   (a) $y_{t+1} = -3y_t + 4, \;\; y_0 = 4.$

   (b) $y_{t+1} = 3y_t + 4, \;\; y_0 = 4.$

   (c) $y_{t+1} = y_t + 4, \;\; y_0 = 2.$

3. Un ahorrador invierte \$1000.00 cada mes durante 10 años. ¿Cuál será el monto de su inversión al final de este periodo si la tasa de interés es del 3 % anual, esto es, 0.25 % mensual

4. El proyecto de Riego de Encarnación de Díaz generará utilidades por \$10,000,000 anuales durante los próximos 15 años. ¿Cuál es el monto máximo posible que se puede pedir al BID si los préstamos son al 9 % anual y se desea pagar anualidades de no mayores al 60 % de los beneficios, es decir, \$6,000,000?

5. Determina cómo es el comportamiento del precio de la cebolla en el modelo de producción agrícola cuando se tiene que $2\beta\delta = N$.

6. Considera la ecuación en diferencias $y_{t+1} = ay_t + b$. Si $a > 0$ ya observamos que la solución general
$$y_t = ca^t + \frac{b}{1-a}$$
es entonces monótona. Determina condiciones en los parámetros a, b así como en el valor inicial y_0 para que una solución sea creciente o decreciente.

7. Describe los diagramas de fase de la siguiente ecuación autónoma. Encuentra sus puntos fijos y determina si son estables o inestables. Determina asimismo el comportamiento a largo plazo de la solución particular indicada.
   (a) $x_{t+1} = \sqrt{4x_t - 3}$, $x_0 = 0{,}8$.
   (b) $x_{t+1} = \sqrt{4x_t - 3}$, $x_0 = 1{,}2$.
   (c) $x_{t+1} = \sqrt{4x_t - 3}$, $x_0 = 3{,}1$.

8. Describe los diagramas de fase de la siguiente ecuación autónoma. Encuentra sus puntos fijos y determina si son estables o inestables. Determina asimismo el comportamiento a largo plazo de la solución particular indicada. Ayuda: usa Excel para ganar un poco de intuición geométrica.
   (a) $x_{t+1} = x_t^3 - x_t^2 + 1$, $x_0 = -1{,}02$.
   (b) $x_{t+1} = x_t^3 - x_t^2 + 1$, $x_0 = -0{,}98$
   (c) $x_{t+1} = x_t^3 - x_t^2 + 1$, $x_0 = -0{,}1$.
   (d) $x_{t+1} = x_t^3 - x_t^2 + 1$, $x_0 = 0$.
   (e) $x_{t+1} = x_t^3 - x_t^2 + 1$, $x_0 = 0{,}1$.
   (f) $x_{t+1} = x_t^3 - x_t^2 + 1$, $x_0 = 0{,}8$.
   (g) $x_{t+1} = x_t^3 - x_t^2 + 1$, $x_0 = 1$.
   (h) $x_{t+1} = x_t^3 - x_t^2 + 1$, $x_0 = 1{,}2$.

9. Describe los diagramas de fase de la siguiente ecuación autónoma. Encuentra sus puntos fijos y determina si son estables o inestables. Ayuda: usa Excel para ganar un poco de intuición geométrica.
   (a) $y_{t+1} = 2y_t(1 - y_t)$, $y_0 = -1$.

(b) $y_{t+1} = 2y_t(1 - y_t), \ \ y_0 = 0.$

(c) $y_{t+1} = 2y_t(1 - y_t), \ \ y_0 = 1/4.$

(d) $y_{t+1} = 2y_t(1 - y_t), \ \ y_0 = 1/2.$

(e) $y_{t+1} = 2y_t(1 - y_t), \ \ y_0 = 3/4.$

(f) $y_{t+1} = 2y_t(1 - y_t), \ \ y_0 = 2.$

10. (a) Demuestra que el Método de Newton para encontrar la raíz cuadrada de un número positivo a está descrito por medio de la ecuación en diferencias
$$x_{t+1} = \frac{1}{2}(x_t + \frac{a}{x_t}).$$
(b) Toma $a = 3$ y $x_0 = 1{,}5$. Calcula los valores de x_1, x_2 y x_3 de esta ecuación en diferencias y observa cómo se van aproximando el valor de $\sqrt{3}$.

(c) Toma $a = 3$, $x_0 = -1{,}5$ y calcula de nuevo los valores de x_1, x_2 y x_3 de esta ecuación en diferencias. ¿A qué valor se acerca ahora la solución?

(d) ¿Es mejor el método de la casita que se enseña en secundaria o este método para aproximar raíces cuadradas?

11. Encuentra un ciclo de orden dos de la ecuación
$$x_{t+1} = -\frac{1}{2}x_t^2 - x_t + \frac{1}{2}$$
y determina si es estable o inestable.

12. ¿Tiene ciclos de orden dos de la ecuación
$$x_{t+1} = 5 - \frac{6}{x_t}?$$
En caso afirmativo determina si es estable o inestable.

13. ¿Tiene ciclos de orden dos de la ecuación
$$x_{t+1} = 4x_t - x_t^2?$$
En caso afirmativo determina si es estable o inestable.

14. Resuelve las siguientes ecuaciones en diferencias de segundo orden:
    (a) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 25y_t = 0, \;\; y_0 = 1, \, y_1 = 0.$
    (b) $y_{t+2} - y_t = 0, \;\; y_0 = 1, \, y_1 = 1.$
    (c) $9y_{t+2} - 6y_{t+1} + 25y_t = 0, \;\; y_0 = 1, \, y_1 = -1.$
    (d) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 1.$
    (e) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = -\left(3^t\right).$
    (f) $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 1 + t.$
    (g) $y_{t+2} + 8y_{t+1} + 12y_t = e^t.$

15. (*Slumdog millionaire*) Considera el caso del concurso televisivo donde ahora Jamal se ha preparado mejor y la probabilidad p de contestar correctamente cada pregunta es de 0.5. Calcula la probabilidad de que Jamal gane el total de 10 mil libras si lleva acumuladas 8 mil libras y decide continuar jugando hasta obtener las 10 mil libras o perder todo. Recuerda que en cada pregunta la suma acumulada aumenta o disminuye en mil libras.

16. ¿Qué tipo de soluciones se obtienen en el modelo de Samuelson de ingreso nacional cuando los paramétros satisfacen $\alpha\gamma = 1$?

17. En 1202 Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, se preguntó cuántos pares de conejos habrá después de un año si se comienza con una pareja recién nacida que al cabo de un mes alcanza la madurez sexual. Además, cada pareja madura produce una nueva pareja cada mes.

    (a) Analiza cómo crece la población de conejos durante los primeros 5 meses.

    (b) Si F_t denota al número total de parejas de conejos después de t meses, observa que
    $$F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$$
    con $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Encuentra la solución de esta ecuación de segundo orden.

    (c) Los números F_t de esta sucesión se conocen como *números de Fibonacci* y sorprendentemente tienen muchas aplicaciones más allá de la cría de conejos. Calcula

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_{t+1}}{F_t}.$$

18. Resuelve los siguientes sistemas de cuaciones en diferencias.

(a) $\mathbf{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_t$ con $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathbf{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X}_t$.

(c) $\mathbf{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_t$.

(d) $\mathbf{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}_t + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

19. Considera el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mathbf{X}_t.$$

Observa que como la matriz es diagonal los valores propios resultan repetidos (iguales a a). Las fórmulas del teorema 8 no pueden emplearse ya que en este caso las entradas b y c de la matriz son cero. Encuentra la solución general de este sistema.

20. Considera el modelo donde un trabajador puede vivir dos etapas: ser trabajador activo o estar pensionado. Denotemos por x_t al número de trabajadores activos en el año t y por y_t al número de trabajadores pensionados. La dinámica de estas poblaciones viene dada por

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1{,}02 x_t \\ y_{t+1} &= 0{,}02 x_t + 0{,}94 y_t \end{aligned}$$

(a) Encuentra una fórmula para x_t y para y_t si al inicio $x_0 = 20'000,000$ y $y_0 = 2'000,000$.

(b) Determina qué proporción de los trabajadores estará en activo en el largo plazo, esto es,

$$\frac{x_N}{x_N + y_N},$$

para N grande.

21. Resuelve el modelo de comercio exterior entre dos naciones con $a_{11} = 0{,}25$, $a_{12} = 0{,}2$, $a_{21} = 0{,}35$, $a_{22} = 0{,}5$, $i_t^1 = i^1 = 20$ y $i_t^2 = i^2 = 40$. Determina cómo evolucionarán y_t^1 y y_t^2 en el largo plazo.

Capítulo 2

Programación dinámica

El propósito de los modelos que estudiamos en el capítulo anterior es describir algunos fenómenos dinámicos donde las variables están determinadas por leyes expresadas por medio de ecuaciones en diferencias. Sin embargo, en muchos casos las variables que deseamos estudiar están determinadas además por las acciones que toman algunos agentes. Nuestro objetivo es ahora encontrar las acciones que debe seguir un agente a lo largo del tiempo para alcanzar un fin específico. Expresado de manera coloquial, en el capítulo anterior fuimos observadores de los fenómenos económicos, mientras que en este capítulo tomaremos el rol de actores y evaluaremos cómo nuestras decisiones inciden en la realidad económica.

2.1. La historia de la cigarra y la hormiga

La fábula clásica de la cigarra y la hormiga puede ser expresada en términos de qué decisión es mejor: el consumo o la inversión.

En 1928 Frank Ramsey [10] abordó este problema animado por Arthur

Pigou y John Keynes. Cabe señalar que a pesar de que Ramsey murió poco antes de cumplir los 27 años, sus ideas son muy reconocidas tanto en las matemáticas, como en la filosofía y la economía. En el modelo de ahorro óptimo que Ramsey desarrolló k_t representa el stock de capital y el ingreso es determinado por una función de producción $f(k)$ con $f' > 0$ y $f'' \leq 0$. El ingreso se destina al consumo, a la inversión neta y a la reposición del capital depreciado, de forma que

$$k_t = f((1-\delta)k_{t-1}) - c_{t-1},$$

donde δ denota la tasa de depreciación del capital.

Para determinar cómo se debe planear la inversión se introduce una función de utilidad social $u(c)$ y un factor de descuento β. Como es usual se supone que $u' > 0$, $u'' < 0$ y $0 < \beta < 1$.

El problema consiste en encontrar la senda de consumo c_0, c_1, $c_2, \ldots$ que maximice el consumo total a lo largo del tiempo

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

sujeto a la restricción

$$k_t = f((1-\delta)k_{t-1}) - c_{t-1}.$$

Observemos que si como la cigarra elegimos inicialmente niveles de consumo c_0, c_1, c_2 altos, entonces los niveles de stock de capital k_1, k_2, k_3 empiezan a decrecer provocando una caída en la producción. Por otro lado, si actuamos como la hormiga y consumimos muy poco inicialmente, en un futuro podremos consumir más, pero debido al factor de descuento estos consumos altos en un futuro lejano inciden poco en la utilidad global.

La programación dinámica es una de las herramientas matemáticas que nos permiten encontrar soluciones a este tipo de situaciones. En un problema de programación dinámica se cuenta con dos tipos de variables:

variable de estado	x_0, x_1, x_2, $x_3, \ldots$
variable de control	u_0, u_1, u_2, $u_3, \ldots$

y una **ley de movimiento** o **ecuación de transición**

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t, t).$$

Se tiene además una función objetivo

$$\sum_{t=0}^{T} f(x_t, u_t, t)$$

que se desea maximizar con x_0 dado.

Observemos que una vez que se ha elegido la senda de la variable de control u_0, u_1, ..., u_T, la senda de la variable de estado está completamente determinada por la ecuación de transición, pues una vez que se tienen x_0 y u_0, el valor de la variable de estado x_1 está dado por $x_1 = g(x_0, u_0, 0)$, y de igual forma x_1 y u_1 determinan entonces el valor de la variable de estado x_2, etc. El problema de programación dinámica consiste entonces en encontrar los valores de la **senda óptima** de la variable de control u_0, u_1, $u_2, \ldots$, u_T que hacen que la suma sea máxima.

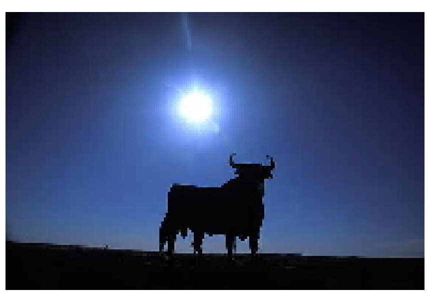
El **Principio de Optimalidad de Bellman** nos ayuda a encontrar la solución a estos problemas. Para ello se define primero la **función de valor** $V_t(x_t)$ como el valor máximo que puede alcanzar la suma de los últimos periodos si en el periodo t nos encontráramos en el punto x_t, es decir,

$$V_t(x_t) = \max_{u_t, \ldots, u_T} \sum_{k=t}^{T} f(x_k, u_k, k).$$

La **ecuación de Bellman** establece una relación de esta función de valor en dos periodos contiguos:

$$V_t(x_t) = \max_{u_t} \left[f(x_t, u_t, t) + V_{t+1}(x_{t+1}) \right]$$

donde $x_{t+1} = g(x_t, u_t, t)$.



El siguiente resultado se obtiene derivando la ecuación de Bellman con respecto a u_t y a x_t. Observa que es necesario emplear el teorema de la envolvente para calcular la derivada parcial con respecto a x_t.

Theorem 12 *Si* $\{ u_0, u_1, \ldots, u_T \}$ *y* $\{ x_0, x_1, \ldots, x_T \}$ *son solución del problema de programación dinámica*

$$\max \sum_{t=0}^{T} f(x_t, u_t, t)$$

sujeto a $x_{t+1} = g(x_t, u_t, t)$*, entonces para* $t = 0, 1, \ldots, T-1$ *se satisfacen*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial u_t}(x_t, u_t, t) + \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}}(x_{t+1}) \frac{\partial g}{\partial u_t}(x_t, u_t, t) \\ \frac{dV_t}{dx_t}(x_t) &= \frac{\partial f}{\partial x_t}(x_t, u_t, t) + \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}}(x_{t+1}) \frac{\partial g}{\partial x_t}(x_t, u_t, t). \end{aligned}$$

A este par de ecuaciones se les llama las **condiciones de primer orden**, y junto con la ecuación de transición nos ayudan a encontrar la solución óptima como a continuación mostramos.

Example 13

Supongamos que deseamos maximizar

$$\sum_{t=0}^{100} (x_t - u_t^2), \quad \text{sujeto a } x_{t+1} = \frac{3}{4} x_t + u_t, \text{ con } \ x_0 \text{ dado.}$$

Las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial (x_t - u_t^2)}{\partial u_t} + V'_{t+1} \frac{\partial (\frac{3}{4} x_t + u_t)}{\partial u_t} \\ V'_t &= \frac{\partial (x_t - u_t^2)}{\partial x_t} + V'_{t+1} \frac{\partial (\frac{3}{4} x_t + u_t)}{\partial x_t}, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} 0 &= -2u_t + V'_{t+1} \\ V'_t &= 1 + V'_{t+1} \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Presentamos ahora un procedimiento sencillo que da origen a una ecuación que no involucra a la función de valor. Despejemos primero V'_{t+1} de la primera ecuación y sustituyamos en la segunda para obtener

$$V'_t = 1 + (3/2)u_t.$$

Como esta ecuación es válida para cualquier t, al iterar un periodo vemos que también es cierto que

$$V'_{t+1} = 1 + (3/2)u_{t+1}.$$

Sustituyendo de nuevo en la primera ecuación obtenemos $2u_t = 1+(3/2)u_{t+1}$, que podemos expresar como

$$u_{t+1} = (4/3)u_t - 2/3.$$

En esta ecuación hemos logrado eliminar a la función de valor y es conocida como la **ecuación de Euler** y junto con la ecuación de transición da lugar al siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (3/4)x_t + u_t \\ u_{t+1} &= (4/3)u_t - 2/3 \end{aligned}$$

La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

que por ser triangular tiene a $\lambda_1 = 3/4$ y a $\lambda_2 = 4/3$ como valores propios. Es fácil obtener un par de vectores propios asociados a estos valores propios,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Para obtener una solución particular resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} (3/4) - 1 & 1 & 0 \\ 0 & (4/3) - 1 & 2/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

De acuerdo al capítulo anterior la solución general del sistema toma la forma

$$\begin{pmatrix} x_t \\ u_t \end{pmatrix} = m \left(\frac{3}{4}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \left(\frac{4}{3}\right)^t \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix},$$

que reescribimos como

$$\begin{aligned} x_t &= m(3/4)^t + 12n(4/3)^t + 8 \\ u_t &= 7n(4/3)^t + 2. \end{aligned}$$

Necesitamos dos condiciones para calcular las constantes m y n. Una condición es obviamente el valor inicial x_0. Para obtener la otra condición es necesario considerar el periodo terminal $T = 100$. En este caso se tiene que

$$V_T(x_T) = \max_{u_T}(x_T - u_T^2)$$

se alcanza cuando $u_T = 0$. Las constantes están por tanto determinadas por el sistema

$$\begin{aligned} m + 12n + 8 &= x_0 \\ 7n(4/3)^{100} + 2 &= u_{100} = 0 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} n &= -\frac{2 \cdot 3^{100}}{7 \cdot 4^{100}} \\ m &= x_0 - 8 + \frac{24 \cdot 3^{100}}{7 \cdot 4^{100}}. \end{aligned}$$

Con estos valores podemos entonces conocer las sendas óptimas de la variable de control y de la variable de estado.

Conviene recordar los pasos algebraicos que empleamos en el ejemplo anterior para encontrar la ecuación de Euler:

1. Despejar $V'_{t+1}(x_{t+1})$ de la primera ecuación.
2. Sustituir en la segunda ecuación.
3. Iterar.
4. Sustituir de nuevo en la primera ecuación. Esta es la ecuación de Euler.

En el siguiente ejemplo mostramos cómo llevar a cabo este proceso.

Example 14

Consideremos el siguiente caso del modelo de Ramsey:

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln(c_t) \;\; \text{sujeto a } k_{t+1} = (1+r)k_t - c_t.$$

Conviene primero distinguir entre la variable de estado y la de control. La variable de estado es siempre la asociada a la ecuación de transición y es en este caso k_t. La variable de control corresponde entonces al consumo c_t. Además identificamos

$$f(k_t, k_t, t) = \beta^t \ln(c_t) \;\; \text{y} \;\; g(k_t, c_t, t) = (1+r)k_t - c_t.$$

Las ecuaciones de Bellman son entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \beta^t \frac{1}{c_t} + V'_{t+1}(k_{t+1})(-1) \\ V'_t(k_t) &= 0 + V'_{t+1}(k_{t+1})(1+r) \end{aligned}$$

Despejamos primero $V'_{t+1}(k_{t+1})$ de la primera ecuación:

$$V'_{t+1}(k_{t+1}) = \beta^t \frac{1}{c_t},$$

sustituimos en la segunda para obtener

$$V'_t(k_t) = \beta^t \frac{(1+r)}{c_t}.$$

El tercer paso consiste en iterar, esto es, adelantar un periodo la ecuación anterior:

$$V'_{t+1}(k_{t+1}) = \beta^{t+1} \frac{(1+r)}{c_{t+1}}.$$

Finalmente, al sustituir esta expresión en la primera ecuación se llega a

$$0 = \beta^t \frac{1}{c_t} - \beta^{t+1} \frac{(1+r)}{c_{t+1}},$$

que al simplificar nos da la ecuación de Euler de este modelo

$$c_{t+1} = \beta(1+r)c_t.$$

Las ecuaciones de transición y de Euler conforman el siguiente sistema lineal de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1+r)k_t - c_t \\ c_{t+1} &= \beta(1+r)c_t \end{aligned}$$

La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1+r & -1 \\ 0 & \beta(1+r) \end{pmatrix}$$

que por ser triangular de nuevo tiene a $\lambda_1 = 1+r$ y a $\lambda_2 = \beta(1+r)$ como valores propios. Es fácil obtener un par de vectores propios asociados a estos valores propios,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+r)(1-\beta) \end{pmatrix},$$

de modo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} k_t \\ c_t \end{pmatrix} = m\,(1+r)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n(1+r)^t\beta^t \begin{pmatrix} 1 \\ (1+r)(1-\beta) \end{pmatrix}.$$

Para determinar los valores de las constantes m y n observamos que

$$V(k_T) = \max_{c_T} \beta^T \ln(c_T).$$

El valor máximo se alcanza cuando c_T es a su vez máxima. Como $k_{T+1} = (1+r)k_T - c_T \geq 0$, se debe satisfacer $c_T = (1+r)k_T$, esto es, $k_{T+1} = 0$. Las constantes que conforman las sendas óptimas de capital y consumo se obtienen del sistema

$$\begin{aligned} m+n &= k_0 \\ m(1+r)^{T+1} + n(1+r)^{T+1}\beta^{T+1} &= k_{T+1} = 0 \end{aligned}$$

esto es,

$$m = -\frac{k_0\beta^{T+1}}{1-\beta^{T+1}} < 0 \text{ y } n = \frac{k_0}{1-\beta^{T+1}} > 0.$$

Observemos que en este modelo el consumo crece o decrece dependiendo de la relación del factor de descuento con la tasa de retorno, esto es, si $(1+r)\beta > 1$ ó $(1+r)\beta < 1$.

Es común que en problemas de carcter económico intertemporales se emplee un factor de descuento para evaluar flujos o utilidad en diferentes periodos. Este tipo de problemas tiene una estructura particular que ahora analizaremos. De manera general podemos expresar estos problemas como

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{T} \beta^t f(x_t, u_t) \quad \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t), \quad x_0 \text{ y } \ x_T \text{ dados.}$$

Estos problemas son llamados **estacionarios** o **autónomos** debido a que las funciones $f(x_t, u_t)$ y $g(x_t, u_t)$ no dependen del tiempo. La única dependencia del tiempo en la suma a maximizar viene dada por el factor de descuento β^t. La ecuación de Bellman en este caso es

$$V_t(x_t) = \max_{u_t} \left[\beta^t f(x_t, u_t) + V_{t+1}(x_{t+1})\right],$$

donde

$$V_t(x_t) = \max_{u_t, \ldots, u_T} \sum_{k=t}^{T} \beta^k f(x_k, u_k)$$

es la función de valor. Al emplear el factor de descuento β^k en los términos de la suma estamos comparando todos los pagos en el tiempo inicial $t = 0$. Otra alternativa consiste en llevar los diferentes pagos de la suma al tiempo t en que inicia la suma. Esta elección se le conoce como emplear **tiempo corriente**. Si denotamos por $\overline{V}_t(x_t)$ a la función de valor óptimo en tiempo corriente, entonces

$$\overline{V}_t(x_t) = \max_{u_t, \ldots, u_T} \sum_{k=t}^{T} \beta^{k-t} f(x_k, u_k)$$

de modo que ambas funciones de valor están relacionadas por

$$V_t(x_t) = \beta^t \overline{V}_t(x_t).$$

La ecuación de Bellman en tiempo corriente es muy fácil de establecer, ya que sólo es necesario ajustar el valor presente de la función de valor $\overline{V}_{t+1}$ en un periodo de tiempo (del periodo $t+1$ al periodo t) :

$$\overline{V}_t(x_t) = \max_{u_t} \left[f(x_t, u_t) + \beta \overline{V}_{t+1}(x_{t+1})\right].$$

Las condiciones de primer orden en tiempo corriente son por tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial u_t} + \beta \frac{d\overline{V}_{t+1}}{dx_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial u_t} \\ \frac{d\overline{V}_t}{dx_t} &= \frac{\partial f}{\partial x_t} + \beta \frac{d\overline{V}_{t+1}}{dx_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial x_t} \end{aligned}$$

que en conjunción con la ecuación de transición nos permite (teóricamente) resolver los problemas de optimización dinámica. La ventaja de esta versión de la ecuación de Bellman es que no involucra potencias de β.

La ecuación de Euler para problemas en tiempo corriente se obitene empleando la misma estrategia mencionada anteriormente.

Example 15

Denotemos por x_t al valor de los activos de un inversionista en el periodo t y por u_t a su consumo. Si el valor de la inversión en el periodo siguiente viene dado por $x_{t+1} = a(x_t - u_t)$, con $a > 1$. La función de utilidad del inversionista asociada a su consumo es u^γ y se tiene un factor de descuento β. Supondremos como es usual que γ y β son números positivos menores que uno. Se contempla un horizonte de inversión de T periodos y se desea que el valor al final de este periodo se tenga un valor x_T dado, donde $x_T < a^T x_0$. Así, se busca

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u_t^\gamma, \text{ sujeto a } \; x_{t+1} = a(x_t - u_t), \quad x_0 \text{ y } \; x_T \text{ dados.}$$

Las condiciones de primer orden en tiempo corriente son

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma u_t^{\gamma-1} - \beta a \overline{V}'_{t+1} \\ V'_t &= \beta a \overline{V}'_{t+1} \end{aligned}$$

Despejamos $\beta a \overline{V}'_{t+1} = \gamma u_t^{\gamma-1}$ y lo sustituimos en la segunda ecuación para obtener $V'_t = \gamma u_t^{\gamma-1}$. Para el siguiente periodo de tiempo esta ecuación es $V'_{t+1} = \gamma u_{t+1}^{\gamma-1}$. Debemos finalmente sustituir esta expresión de nuevo en la primera ecuación

$$\gamma u_t^{\gamma-1} = \beta a \overline{V}'_{t+1} = \beta a \gamma u_{t+1}^{\gamma-1}.$$

Esta es la ecuación de Euler asociada a este problema. Resulta conveniente despejar u_{t+1} y expresarla como

$$u_{t+1} = \mu u_t,$$

donde la constante $\mu = (\beta a)^{1/(1-\gamma)}$. Tenemos ahora el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= a(x_t - u_t) \\ u_{t+1} &= \mu u_t \end{aligned}$$

Su matriz es

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

que tiene a a y μ como valores propios. Podemos elegir entonces como vectores propios a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} a \\ a-\mu \end{pmatrix},$$

respectivamente. La solución general de este sistema es por tanto

$$\begin{pmatrix} x_t \\ u_t \end{pmatrix} = ma^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n\mu^t \begin{pmatrix} a \\ a-\mu \end{pmatrix}.$$

Las constantes se determinan empleando los valores x_0 y x_T:

$$\begin{aligned} m + an &= x_0 \\ ma^T + an\mu^T &= x_T \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se llega a que

$$m = \frac{\mu^T x_0 - x_T}{\mu^T - a^T} \text{ y } n = \frac{x_T - a^T x_0}{a\left(\mu^T - a^T\right)}.$$

Con estos valores podemos establecer la senda de consumo óptima:

$$\begin{aligned} u_t &= n\mu^t(a-\mu) \\ &= \frac{(a^T x_0 - x_T)(\mu - a)}{a\left(\mu^T - a^T\right)}\mu^t. \end{aligned}$$

Es natural esperar que estos valores siempre resulten positivos. Como

$$\frac{(\mu - a)}{\mu^T - a^T} = \frac{1}{\mu^{T-1} + \mu^{T-2}a + \cdots + \mu a^{T-2} + a^{T-1}} > 0,$$

entonces $u_t > 0$ si y sólo si

$$a^T x_0 - x_T > 0.$$

Esto sucede precisamente cuando

$$x_T < a^T x_0.$$

Esta desigualdad no es sorprendente ya que $a^T x_0$ representa el valor de la inversión en el periodo final si no se hubiese consumido nada durante todo el intervalo de tiempo de la inversión. Puesto que

$$\frac{(a^{T-1}x_0 - x_T/a)(\mu - a)}{\mu^T - a^T} > 0$$

la senda óptima de consumo es decreciente precisamente cuando $\mu < 1$. De hecho, es fácil verificar que

$$\mu < 1 \Leftrightarrow \beta a < 1.$$

De este modo vemos que los consumos decrecen en el tiempo cuando el efecto del factor de descuento es grande (β pequeño) con respecto a la tasa de retorno de la inversión.

2.2. Horizonte infinito

Los economistas estudian con frecuencia modelos de optimización donde no hay un tiempo final específico T. Suponen así que los agentes son inmortales y que sus decisiones continúan relevantes por los siglos de los siglos. Esto tiene la ventaja de que no es necesario especificar una condición terminal una vez que el periodo final es alcanzado. Puesto que los supuestos de los modelos difícimente continúan vigentes en el largo plazo, es conveniente suponer que el impacto de las decisiones en el largo plazo sea muy pequeño. A continuación presentamos algunas ideas que nos permiten resolver problemas autónomos

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t) \quad \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t), \quad x_0 \text{ dado.}$$

Un aspecto delicado de este tipo de problemas es que como ahora la suma es infinita podría suceder que fuese divergente. Aquí no abordaremos el problema de la convergencia, pero la presencia del factor de descuento $0 < \beta < 1$ juega un rol importante en la convergencia de la suma en un gran variedad de problemas. Por ejemplo, si la función objetivo se mantiene acotada en todo tiempo, esto es, $|f(x_t, u_t)| < M$ para todo tiempo t, es claro que la serie

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t)$$

será convergnente para cualquier política $u_0, \, u_1, \, u_2, \ldots$ que se elija.

Para cualquier tiempo s y para cualquier estado x_s en ese periodo consideraremos sucesiones

$$\sigma_s = (u_s, \, u_{s+1}, \, u_{s+2}, \ldots).$$

Observemos que dados x_s y σ_s, la ecuación de transición determina la evolución de la variable de estado $(x_s, \, x_{s+1}, \, x_{s+2}, \ldots)$ y por lo tanto se tiene una función

$$V_s(x_s, \sigma_s) = \sum_{t=s}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t).$$

Si denotamos de nuevo por $\overline{V}_s$ a esta función descontada en tiempo corriente, esto es,

$$\overline{V}_s(x_s, \sigma_s) = \sum_{t=s}^{\infty} \beta^{t-s} f(x_t, u_t)$$

Se tiene de nuevo la relación $\beta^s \overline{V}_s = V_s$. La función de valor en tiempo corriente está definida por

$$\overline{V}_s(x_s) = \max_{\sigma_s} \overline{V}_s(x_s, \sigma_s).$$

Supongamos $(\widetilde{u}_s, \, \widetilde{u}_{s+1}, \, \widetilde{u}_{s+2}, \ldots)$ es la sucesión de controles que maximiza $\overline{V}_s$. Entonces estos controles determinan la senda óptima de estados $(\widetilde{x}_s, \, \widetilde{x}_{s+1}, \, \widetilde{x}_{s+2}, \ldots)$

y

$$\begin{aligned}\overline{V}_s(x) &= \max \sum_{t=s}^{\infty} \beta^{t-s} f(x_t, u_t) \\ &= f(x_s, \widetilde{u}_s) + \beta f(\widetilde{x}_{s+1}, \widetilde{u}_{s+1}) + \beta^2 f(\widetilde{x}_{s+2}, \widetilde{u}_{s+2}) + \cdots\end{aligned}$$

Si ahora consideramos otro tiempo k, y $(\widehat{u}_k,\, \widehat{u}_{k+1},\, \widehat{u}_{k+2}, \ldots)$ es la correspondiente senda óptima

$$\begin{aligned}\overline{V}_k(x_k) &= \max \sum_{t=k}^{\infty} \beta^{t-k} f(x_t, u_t) \\ &= f(x_k, \widehat{u}_k) + \beta f(\widehat{x}_{k+1}, \widehat{u}_{k+1}) + \beta^2 f(\widehat{x}_{k+2}, \widehat{u}_{k+2}) + \cdots\end{aligned}$$

es evidente cuando partimos del mismo estado inicial, esto es, $x_s = x_k$, las dos sumas deben maximizarse en los mismos puntos, esto es,

$$(\widehat{u}_k,\, \widehat{u}_{k+1},\, \widehat{u}_{k+2}, \ldots) = (\widetilde{u}_s,\, \widetilde{u}_{s+1},\, \widetilde{u}_{s+2}, \ldots)$$

y por tanto,

$$\overline{V}_s(x) = \overline{V}_k(x).$$

En particular si denotamos por $\overline{V}(x)$ a $\overline{V}_0(x) = V_0(x)$, se tendrá que para todo tiempo s se cumple

$$\overline{V}_s(x) = \overline{V}(x).$$

La **ecuación de Bellman** en tiempo corriente para horizonte infinito y problemas autónomos toma entonces la forma

$$\overline{V}(x_t) = \max_{u_t} \left[f(x_t, u_t) + \beta \overline{V}(x_{t+1}) \right],$$

donde $x_{t+1} = g(x_t, u_t)$. Al igual que en el caso de horizonte finito las condiciones de primer orden se obtienen derivando respecto a u_t y a x_t :

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial f}{\partial u_t} + \beta \overline{V'}(x_{t+1}) \frac{\partial g}{\partial u_t} \\ \overline{V'}(x_t) &= \frac{\partial f}{\partial x_t} + \beta \overline{V'}(x_{t+1}) \frac{\partial g}{\partial x_t}.\end{aligned}$$

La segunda ecuación es conocida como *condición de Benveniste-Scheinkman*. Veamos ahora cómo podemos emplear estas condiciones para obtener una ecuación de Euler y en teoría describir las sendas óptimas de control y estado.

Example 16

Consideremos el problema clásico

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t) \\ \text{sujeto a } \ k_{t+1} &= (1+r)k_t - c_t, \quad k_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Supondremos asimismo que k_t se mantiene acotado. Es claro que el consumo es la variable de control y el valor del activo es la variable de estado. Las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c_t} - \beta\overline{V'}(k_{t+1}) \\ \overline{V'}(k_t) &= \beta(1+r)\overline{V'}(k_{t+1}). \end{aligned}$$

Si despejamos $\overline{V'}(a_{t+1})$ de la primera ecuación y sustituimos en la segunda se tiene

$$\overline{V'}(k_t) = \frac{(1+r)}{c_t}.$$

Como esto es válido en todo tiempo, tendremos que para el periodo siguiente se satisface

$$\overline{V'}(k_{t+1}) = \frac{(1+r)}{c_{t+1}}.$$

Si sustituimos esta expresión en la primera ecuación del sistema se llega a

$$\frac{1}{c_t} = \frac{\beta(1+r)}{c_{t+1}}$$

que al despejar c_{t+1} produce la ecuación de Euler:

$$c_{t+1} = \beta(1+r)c_t.$$

Esta ecuación coincide con la ecuación de Euler del ejemplo 14, que es de hecho el mismo modelo sólo que en horizonte finito. El sistema de ecuaciones es idéntico y por lo tanto se tendrá

$$\begin{pmatrix} k_t \\ c_t \end{pmatrix} = m\,(1+r)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n(1+r)^t\beta^t \begin{pmatrix} 1 \\ (1+r)(1-\beta) \end{pmatrix}.$$

Una nueva dificultad que debemos sortear es que sólo tenemos una condición inicial (el valor k_0) para determinar las constantes m y n. Recordemos que supusimos que el valor de la inversión k_t se mantiene acotado. En el largo plazo,

$$\left|m(1+r)^t\right| > \left|n(1+r)^t\beta^t\right|,$$

así que k_t se mantiene acotado si y sólo si

$$m = 0 \ \text{ y } \ \beta(1+r) < 1.$$

Por tanto,

$$k_t = n\beta^t(1+r)^t,$$

y al evaluar en $t = 0$ obtenemos que $n = k_0$. Las sendas óptimas son entonces

$$k_t = k_0\beta^t(1+r)^t \ \text{ y } \ c_t = (1+r)(1-\beta)k_t,$$

El siguiente modelo de consumo óptimo considera una función de producción es de tipo Cobb-Douglas. A pesar de que la ecuación de Euler resultante es no-lineal es posible con un poco de ingenio encontrar la solución óptima.

Example 17

Ahora se requiere

$$\begin{gathered} \text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t) \\ \text{sujeto a } \ k_{t+1} \ = \ k_t^{\alpha} - c_t, \ \ k_t \text{ acotado y } k_0 \text{ dado.} \end{gathered}$$

Se tiene además, como es usual, que $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. Las condiciones de primer orden en tiempo corriente son ahora

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c_t} - \beta\overline{V'}(k_{t+1}) \\ \overline{V'}(k_t) &= \alpha\beta\overline{V'}(k_{t+1})k_t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación de Euler despejamos $\overline{V'}(k'_{t+1})$ de la primera ecuación y sustituimos en la segunda para obtener

$$\overline{V'}(k_t) = \frac{\alpha k_t^{\alpha-1}}{c_t}.$$

Como esta ecuación es válida para todo t se tiene asimismo

$$\overline{V'}(k_{t+1}) = \frac{\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}}{c_{t+1}},$$

que al sustituir de nuevo en la primera ecuación nos permite deducir que

$$\frac{1}{c_t} = \frac{\alpha\beta k_{t+1}^{\alpha-1}}{c_{t+1}}.$$

Si multiplicamos por k_{t+1} en ambos lados de la ecuación vemos que la ecuación de Euler toma la forma

$$\frac{k_{t+1}}{c_t} = \frac{\alpha\beta k_{t+1}^{\alpha}}{c_{t+1}}.$$

Después de emplear la ecuación de transición se tiene

$$\frac{k_t^{\alpha} - c_t}{c_t} = \frac{\alpha\beta k_{t+1}^{\alpha}}{c_{t+1}},$$

que podemos escribir como

$$\frac{k_{t+1}^{\alpha}}{c_{t+1}} = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{k_t^{\alpha}}{c_t} - \frac{1}{\alpha\beta}.$$

Para transformar esta ecuación en una lineal basta con sustituir al cociente k_t^{α}/c_t por la expresión μ_t. Así, se tiene simplemente

$$\mu_{t+1} = \frac{1}{\alpha\beta}\mu_t - \frac{1}{\alpha\beta}$$

cuya solución general es

$$\mu_t = m\frac{1}{(\alpha\beta)^t} + \frac{1}{1-\alpha\beta}.$$

Observemos que la solución estacionaria resulta inestable ya que

$$\frac{1}{\alpha\beta} > 1,$$

sin embargo, apartarnos de ella nos llevaría a soluciones que carecen de sentido económico. Si m fuese negativa, entonces la razón $\mu_t = k_t^{\alpha}/c_t$ tomaría valores negativos lo cual no es posible. Por otro lado, si m fuese positiva, entonces $\mu_t = k_t^\alpha / c_t$ tendería a infinito y el consumo sería entonces muy pequeño en relación al ingreso. Esto tampoco es razonable si lo que deseamos es maximizar el consumo a lo largo del tiempo. De esta forma vemos que $m = 0$ y, por tanto,

$$\frac{k_t^\alpha}{c_t} = \frac{1}{1 - \alpha\beta}.$$

Así, la senda de consumo óptimo es

$$c_t = (1 - \alpha\beta) k_t^\alpha.$$

Finalizaremos esta sección presentando un modelo de Martin Weitzman que es analizado de forma diferente por H. Lomelí y B. Rumbos en [5].

Example 18

Con la única inversión que hizo en su vida, la compra de un billete de lotería, Avelino tuvo la fortuna de poder comprar un viñedo. La única preocupación de Avelino consiste en cada vendimia decidir qué cantidad de su cosecha dedica al consumo de las uvas y qué cantidad dedica a la producción de vino. Si u_t y v_t denotan las proporciones de uva y vino que Avelino destina a consumir, debido al periodo de fermentación del vino se debe satisfacer $v_{t+1} = 1 - u_t$. A pesar de que gusta mucho del vino, las uvas frescas le son indispensables para sobrellevar el malestar por el exceso en el consumo del vino, así que si le asignamos la misma satisfacción a cada producto el problema de Avelino consiste en

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_t^{1/2} v_t^{1/2} \quad \text{sujeto a } v_{t+1} = 1 - u_t, \quad v_0 \text{ dado.}$$

El vino es por tanto la variable de estado y la uva la de control. Las condiciones de primer orden vienen dadas por

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{v_t^{1/2}}{2u_t^{1/2}} + \beta \overline{V}'(v_{t+1})(-1) \\ \overline{V}'(v_t) &= \frac{u_t^{1/2}}{2v_t^{1/2}} + \beta \overline{V}'(v_{t+1})(0). \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación de Euler iteramos la segunda ecuación para obtener

$$\overline{V}'(v_{t+1}) = \frac{u_{t+1}^{1/2}}{2v_{t+1}^{1/2}}$$

y sustituimos en la primera ecuación. De esta forma,

$$\frac{v_t^{1/2}}{2u_t^{1/2}} = \beta \frac{u_{t+1}^{1/2}}{2v_{t+1}^{1/2}}.$$

Al elevar al cuadrado llegamos a la siguiente expresión de la ecuación de Euler:

$$\frac{v_t}{u_t} = \beta^2 \frac{u_{t+1}}{v_{t+1}}.$$

Para estudiar esta ecuación conviene introducir la variable

$$\mu_t = \frac{u_t}{v_t},$$

ya que de esta forma la ecuación de Euler se convierte en

$$\mu_{t+1} = \frac{1}{\beta^2 \mu_t}.$$

Esta es una ecuación de primer orden no lineal, pero como es autónoma podemos estudiarla por medio de su diagrama de fase. La función

$$g(\mu) = \frac{1}{\beta^2 \mu}$$

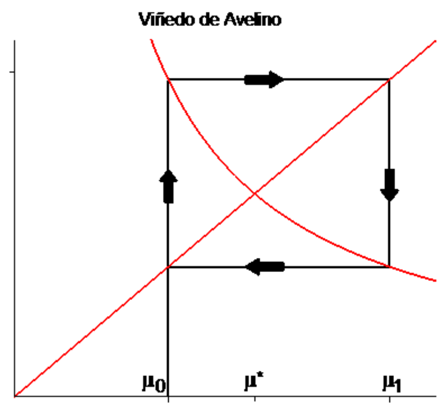
sólo tiene un punto fijo dado por $\mu^* = 1/\beta$. Para estudiar su estabilidad derivamos la función

$$g'(\mu) = -\frac{1}{\beta^2 \mu^2}.$$

Al evaluar la derivada en el punto fijo tenemos que $g'(1/\beta) = -1$, de modo que no aplica entonces el criterio de estabilidad de las soluciones estacionarias. El comportamiento de las soluciones resulta muy peculiar ya que

$$\begin{aligned} g(g(\mu)) &= \frac{1}{\beta^2 g(\mu)} \\ &= \frac{1}{\beta^2 \left(1/\beta^2 \mu\right)} \\ &= \mu. \end{aligned}$$

De aquí concluimos que todas las órbitas no-estacionarias son periódicas de periodo dos. La siguiente figura muestra las órbitas no-estacionarias.



¿Cuáles son entonces las proporciones de uva y vino que le darán a Avelino una mayor utilidad? Consideremos primero la solución estacionaria. Observemos que en este caso

$$\frac{u_t}{v_t} = \frac{1}{\beta}.$$

Despejando u_t de esta relación y sustituyendo en la ecuación de transición se llega a la ecuación lineal en diferencias de primer orden

$$v_{t+1} = -\frac{v_t}{\beta} + 1.$$

Su solución general es

$$\begin{aligned} v_t &= c\,(-1/\beta)^t + \frac{1}{1+(1/\beta)} \\ &= c\,(-1/\beta)^t + \frac{\beta}{1+\beta}. \end{aligned}$$

Como $|-1/\beta| > 1$ es claro que v_t toma valores entre 0 y 1 sólo si $c = 0$. Por lo tanto,

$$v_t = \frac{\beta}{1+\beta} \quad \text{y} \quad u_t = \mu^* v_t = \frac{1}{1+\beta}.$$

Así, también permanecen fijas las proporciones u_t y v_t. Resulta curioso que en esta solución, la proporción de uva es mayor que la de vino a pesar de que supusimos que la función de utilidad es simétrica con respecto a ambos bienes. Esta asimetría se debe a que el vino tarda un periodo en producirse y su consumo viene descontado por el factor β. Es claro que la solución estacionaria se da únicamente en el caso específico en que la dotación inicial de vino sea

$$v_0 = \frac{\beta}{1+\beta}.$$

Para analizar el caso de las soluciones periódicas de orden dos empleamos las mismas ideas. Observemos que ahora

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } t \text{ es par} \\ \frac{1}{\beta^2\mu_0} & \text{si } t \text{ es impar,} \end{cases}$$

por lo que

$$u_t = \begin{cases} \mu_0 v_t & \text{si } t \text{ es par} \\ \frac{v_t}{\beta^2\mu_0} & \text{si } t \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto,

$$v_{2t+1} = 1 - u_{2t} = 1 - \mu_0 v_{2t}$$

y

$$v_{2t+2} = 1 - u_{2t+1} = 1 - \frac{v_{2t+1}}{\beta^2\mu_0}.$$

Sustituyendo la expresión de v_{2t+1} de la primera ecuación en la segunda y simplificando se obtiene

$$v_{2t+2} = \frac{v_{2t}}{\beta^2} + \frac{\beta^2\mu_0 - 1}{\beta^2\mu_0}.$$

La solución general de esta ecuación lineal de primer orden es

$$v_{2t} = m\left(\frac{1}{\beta^2}\right)^{2t} + \frac{\beta^2\mu_0 - 1}{(\beta^2-1)\mu_0}.$$

De nuevo, como $0 \leq v_{2t} \leq 1$, la única posible solución se da cuando $m = 0$, esto es,

$$v_{2t} = \frac{\beta^2\mu_0 - 1}{(\beta^2-1)\mu_0}.$$

En particular, v_0 satisface esta relación. Despejando μ_0 se tiene que

$$\mu_0 = \frac{1}{\beta^2 + (1-\beta^2)v_0}.$$

De aquí es fácil deducir que

$$\mu_1 = \frac{1}{\beta^2 \mu_0} = \frac{\beta^2 + (1-\beta^2)v_0}{\beta^2}.$$

Además, como $0 < v_0 < 1$ se tiene que

$$\mu_0 = \frac{1}{\beta^2 + (1-\beta^2)v_0} > \frac{1}{\beta^2 + (1-\beta^2)} = 1,$$

así como,

$$\mu_1 = \frac{\beta^2 + (1-\beta^2)v_0}{\beta^2} > \frac{\beta^2}{\beta^2} = 1.$$

Esto implica que, al igual que en el caso estacionario, en todo periodo el consumo de uva es superior al de vino. Los consumos óptimos de vino y uva se repiten cada dos periodos produciendo sendas óptimas de consumo de la forma

$$\begin{aligned}(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, ...) &= (v_0, v_1, v_0, v_1, v_0, ...)\\ (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, ...) &= (u_0, u_1, u_0, u_1, u_0, ...)\end{aligned}$$

2.3. Adivinando la función de valor

En los ejemplos anteriores hemos mostrado cómo la ecuación de Euler y la ecuación de transición dan origen a un sistema de ecuaciones en diferencias cuya solución caracteriza a la senda de control óptimo. Desafortunadamente, es poco común que estos sistemas sean lineales por lo que su solución requiere en general de mucho trabajo e ingenio. Existe otro enfoque alternativo cuando el sistema surgido de la ecuación de Euler es más complicado. La idea es considerar a las funciones de valor $\overline{V}(x_t)$ como incógnitas de la ecuación de Bellman. Una vez que se conocen las funciones de valor es posible determinar las trayectorias óptimas sin necesidad de emplear la ecuación de Euler. Una forma sencilla de caracterizar estas funciones de valor consiste en proponer una forma general para las funciones de valor y usar el método de coeficientes indeterminados. Consideremos de nuevo el ejemplo recién presentado:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t) \\ \text{sujeto a } \ k_{t+1} &= k_t^{\alpha} - c_t, \quad k_t \text{ acotado y } k_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

La ecuación de Bellman en tiempo corriente es

$$\overline{V}(k_t) = \max_{c_t} \left[\ln(c_t) + \beta \overline{V}(k_{t+1}) \right].$$

En general es difícil encontrar la forma general de la función de valor, pero una regla sencilla que funciona con cierta frecuencia es tomar una forma general asociada a la función de utilidad. En el caso que estamos estudiando la función de utilidad es logarítmica y, por lo tanto, conviene suponer que la función de valor es del tipo

$$\overline{V}(k_t) = A + B \ln(k_t).$$

Si esto fuese correcto se debe satisfacer

$$\begin{aligned} A + B \ln(k_t) &= \overline{V}(k_t) \\ &= \max_{c_t} \left[\ln(c_t) + \beta \overline{V}(k_{t+1}) \right] \\ &= \max_{c_t} \left[\ln(c_t) + \beta \left(A + B \ln(k_{t+1}) \right) \right] \\ &= \max_{c_t} \left[\ln(c_t) + \beta \left(A + B \ln(k_t^{\alpha} - c_t) \right) \right]. \end{aligned}$$

Derivamos ahora con respecto a c_t para obtener

$$0 = \frac{1}{c_t} - \frac{\beta B}{k_t^{\alpha} - c_t}$$

de donde podemos expresar c_t como

$$c_t = \frac{1}{1 + \beta B} k_t^{\alpha}.$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación de Bellman

$$\begin{aligned}
A + B\ln(k_t) &= \ln\left(\frac{1}{1+\beta B}k_t^\alpha\right) + \beta\left(A + B\ln\left(k_t^\alpha - \frac{1}{1+\beta B}k_t^\alpha\right)\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{1+\beta B}k_t^\alpha\right) + \beta\left(A + B\ln\left(\frac{\beta B}{1+\beta B}k_t^\alpha\right)\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{1+\beta B}\right) + \alpha\ln(k_t) + \beta A + \beta B\ln\left(\frac{\beta B}{1+\beta B}\right) + \beta B\alpha\ln(k_t)\\
&= \left[\ln\left(\frac{1}{1+\beta B}\right) + \beta A + \beta B\ln\left(\frac{\beta B}{1+\beta B}\right)\right] + \alpha(1+\beta B)\ln(k_t)\\
&= [\beta A + \beta B\ln(\beta B) - (1+\beta B)\ln(1+\beta B)] + \alpha(1+\beta B)\ln(k_t).
\end{aligned}$$

De esta desigualdad se desprende el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\beta A + \beta B\ln(\beta B) - (1+\beta B)\ln(1+\beta B) &= A\\
\alpha(1+\beta B) &= B
\end{aligned}$$

cuya solución viene dada por

$$B = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

y

$$A = \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{1-\alpha\beta}\left[\alpha\beta\ln\left(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right) - \ln\left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)\right].$$

Podemos ahora describir la senda óptima de consumo es por tanto

$$c_t = \frac{1}{1+\beta B}k_t^\alpha = (1-\alpha\beta)k_t^\alpha$$

así como la senda óptima de capital

$$k_{t+1} = k_t^\alpha - c_t = \alpha\beta k_t^\alpha.$$

2.4. Ejercicios

1. Encuentra la senda óptima de consumo para el siguiente problema:

$$\text{máx}\sum_{t=0}^{2}\beta^t\sqrt{c_t}\ \text{ sujeto a } k_{t+1} = (1+r)k_t - c_t,\ k_0 \text{ dado.}$$

2. Consideremos un sistema de pesos $w_1, w_2, \ldots, w_T$ con $w_i > 0$ tales que $\sum w_i = 1$, y sea M un número real positivo. Considera el siguiente problema de optimización: encontrar números positivos $u_1, u_2, \ldots, u_T$ tales que
$$\text{mín} \sum w_i u_i^2 \text{ sujeto a } \sum u_i = M.$$

   (a) Resuelve este problema empleando métodos de cálculo.

   (b) Este problema puede también ser resuelto por medio de programación dinámica. Para ello define
$$x_t = \sum_{k=t}^{T} u_k$$
   por lo que $x_1 = M$ y $x_{T+1} = 0$. Así, el problema equivale a
$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} w_i u_i^2 \text{ sujeto a } x_{t+1} = x_t - u_t.$$
   Encuentra ahora la solución empleando programación dinámica.

3. Resuelve el problema
$$\text{máx} \sum_{t=0}^{T} (1 - x_t^2 - 2u_t^2), \quad x_{t+1} = x_t - u_t, \quad x_0 \text{ dado.}$$

4. Encuentra la senda óptima de consumo para el siguiente problema:
$$\text{máx} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln(c_t) \text{ sujeto a } k_{t+1} = (1+r)k_t - c_t, \; k_0 \text{ dado.}$$

5. En el siglo III de nuestra era Marco Flaminio Rufo, tribuno militar de las legiones de Roma, emprendió la búsqueda de la Ciudad de los Inmortales. Varios siglos después escribió:

   El concepto del mundo como sistema de precisas compensaciones influyó vastamente en los Inmortales. En primer término, los hizo invulnerables a la piedad. He mencionado las antiguas canteras que rompían los campos de la otra margen; un hombre se despeñó en la más honda; no podía lastimarse ni morir, pero lo abrasaba la sed; antes de que *le arrojaran una cuerda pasaron setenta años. Tampoco interesaba el propio destino. El cuerpo no era más que un sumiso animal doméstico y le bastaba, cada mes, la limosna de unas horas de sueño, de un poco de agua y de una piltrafa de carne. Que nadie quiera rebajarnos a ascetas. No hay placer más complejo que el pensamiento y a él nos entregábamos. A veces, un estímulo extraordinario nos restituía al mundo físico. Por ejemplo, aquella mañana, el viejo goce elemental de la lluvia. Esos lapsos eran rarísimos; todos los Inmortales eran capaces de perfecta quietud; recuerdo alguno a quien jamás he visto de pie: un pájaro anidaba en su pecho.*

(a) Ante esta descripción de las necesidades y gustos de los inmortales ¿consideras que tiene sentido que un consumidor inmortal obtenga alguna satisfacción por continuar consumiendo eternamente? ¿Cómo justificar entonces los modelos con horizonte infinito?

(b) ¿Cuál es la fuente esta cita?

6. Encuentra la senda óptima de consumo para el siguiente problema:

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t) \text{ sujeto a } k_{t+1} = (1+r)(k_t - c_t),\ k_0 \text{ dado, } (1+r)\beta < 1.$$

7. Encuentra la senda óptima de consumo para el siguiente problema:

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{c_t} \text{ sujeto a } k_{t+1} = (1+r)(k_t - c_t),\ k_0 \text{ dado, } (1+r)\beta < 1.$$

8. Encuentra la senda óptima de consumo para el siguiente problema:

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{\gamma} \text{ sujeto a } k_{t+1} = (1+r)(k_t - c_t),\ k_0 \text{ dado, } (1+r)\beta < 1.$$

9. Considera el problema

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (-0{,}5x_t^2 - u_t^2) \text{ sujeto a } x_{t+1} = x_t + u_t,\ x_0 \text{ dado.}$$

Supón que la función de valor en tiempo corriente viene dada por $\overline{V}(x_t) = -Ax_t^2$.

(a) Encuentra una fórmula para la función de valor en tiempo corriente.

(b) Determina la sucesión óptima de controles $u_0,\, u_1,\, u_2, \ldots$

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales

En los próximos capítulos consideraremos modelos donde las variables evolucionan de manera contínua a lo largo del tiempo. Hay una gran variedad de técnicas que hacen de esta alternativa una forma muy eficiente para analizar fenómenos económicos.

3.1. Ecuaciones lineales de primer orden

Consideremos el mercado de un bien y denotemos por $S(p)$ y $D(p)$ a sus funciones de oferta y demanda. El **mecanismo de Walras** supone que cuando el mercado no está en equilibrio el precio del bien se ajusta de acuerdo a

$$p'(t) = \alpha \left[D(p(t)) - S(p(t)) \right]$$

donde α es una constante positiva. Para entender el significado de esta ecuación observemos que la diferencia $D(p(t)) - S(p(t))$ es el exceso de demanda y, como $\alpha > 0$, se tiene que el signo de $p'(t)$ es igual al signo del exceso de demanda. Así, cuando el exceso de demanda es positivo el precio del bien aumentará, mientras que cuando el exceso de demanda es negativo el precio del bien disminuirá. Si suponemos además que las funciones de oferta y demanda son lineales, digamos que

$$S(p) = m_1 p - b_1 \quad \text{y} \quad D(p) = b_2 - m_2 p,$$

entonces la ecuación anterior se reduce a

$$p'(t) = \alpha \left[(b_1 + b_2) - (m_1 + m_2) p(t) \right].$$

Esta es una ecuación diferencial. Su solución consiste de una función diferenciable $p(t)$ cuya derivada satisfaga esta relación.

A las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y'(t) + ay(t) = b$$

donde a y b son constantes se les conoce como **ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes.** A menudo la dependencia de la variable t se da por un hecho y sólo se escribe

$$y' + ay = b$$

para referirnos a la ecuación anterior. Para resolver estas ecuaciones reescribimos la ecuación como

$$\frac{y'}{b - ay} = 1$$

e integramos con respecto a t :

$$\int \frac{y'}{b - ay} dt = \int dt.$$

Como en realidad y depende de t se tiene que $dy = y'dt$ y la ecuación anterior equivale a

$$\int \frac{dy}{b - ay} = \int dt.$$

La integral del lado izquierdo se obtiene fácilmente mediante la sustitución $u = b - ay$, así que deben existir dos constantes de integración k_1 y k_2 tales que

$$-\frac{1}{a} \ln |b - ay| + k_1 = t + k_2.$$

De aquí se obtiene

$$\begin{aligned} \ln |b - ay| &= -at + -a(k_2 - k_1) \\ &= -at + k_3 \end{aligned}$$

donde simplemente hemos expresado a la constante $-a(k_2 - k_1)$ como k_3. Para despejar y conviene aplicar primero la función exponencial

$$\begin{aligned} |b - ay| &= e^{(-at+k_3)} \\ &= e^{k_3} e^{-at}. \end{aligned}$$

Así que y está dada por

$$y = ce^{-at} + \frac{b}{a}$$

donde

$$c = \begin{cases} e^{k_3}/a & \text{si } \ b - ay < 0 \\ -e^{k_3}/a & \text{si } \ b - ay > 0. \end{cases}$$

A primera vista parece un poco extraño el manejo de las constantes, sin embargo esta simplificación resulta muy conveniente y en las aplicaciones sólo hay que determinar el valor de c asociado al valor de la función y en un tiempo inicial t_0. En resumen, tenemos el siguiente resultado:

Theorem 19 *La solución general de la ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes $y' + ay = b$ es*

$$y(t) = ce^{-at} + \frac{b}{a},$$

donde c depende de condiciones iniciales.

Se tiene en realidad no una solución, sino toda una familia de soluciones, una para cada valor de la constante c. Cuando no tenemos asignado un valor específico a la constante hablamos de la **solución general**, mientras que se denomina **solución particular** a la solución asociada a un valor específico de c.

La **ecuación homogénea** corresponde al caso $b = 0$, esto es, $y' + ay = 0$. Esta ecuación aparece en modelos de crecimiento exponencial (Malthusianos) cuando $a < 0$, así como en fenomenos de desintegración radioactiva ($a > 0$).

Veamos ahora que con la ayuda del teorema anterior es muy sencillo encontrar las soluciones de este tipo de ecuaciones.

Example 20

(a) $y' = 4y - 12$, $y(0) = 4$.
De acuerdo al teorema

$$y(t) = ce^{at} - \frac{b}{a} = ce^{4t} + 3$$

y si sustituimos el valor de $t = 0$ e igualamos a la condición inicial vemos que

$$\begin{aligned} y(0) &= ce^0 + 3 \\ &= c + 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

de donde se tiene $c = 1$ y, por tanto, $y(t) = e^{4t} + 3$.

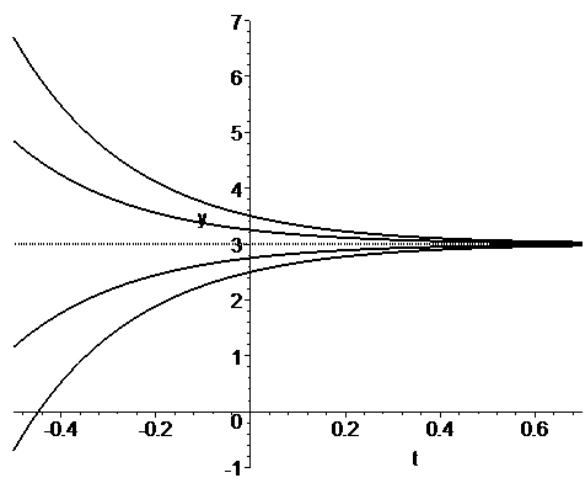
(b) $y' = -4y + 12$, $y(0) = 4$.

Si procedemos como en el ejemplo anterior se llega ahora a $y(t) = e^{-4t} + 3$.

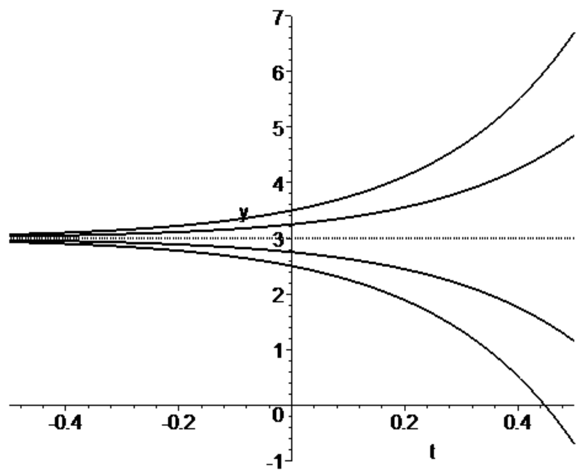
Consideremos de nuevo a la ecuación $y' = -4y + 12$. Todas las soluciones son de la forma

$$y(t) = ce^{-4t} + 3,$$

donde la constante c está determinada por condiciones iniciales. De hecho, $c = y(0) - 3$. Así, la gráfica de todas las soluciones es una familia de curvas decrecientes cuando $y(0) > 3$ y una familia de curvas crecientes cuando $y(0) < 3$. Cuando $y(0)$ es precisamente 3, entonces $c = 0$ y la solución es simplemente $y(t) = 3$. Esta es la **solución estacionaria** o **solución de equilibrio**. La siguiente figura muestra algunas de estas soluciones.



Si ahora consideramos la famila de soluciones de la ecuación $y' = 4y - 12$, entonces la figura correspondiente se ve como sigue.



Hay un aspecto muy interesante que conviene señalar en cuanto a estos dos casos. En el primer caso, vemos que cuando la condición inicial es diferente del valor de la solución estacionaria, la solución tiende a la solución estacionaria en el largo plazo. Se dice en este caso que la solución estacionaria es **estable**. Por otro lado, en el segundo caso si consideramos alguna solución cuya condición inicial sea cercana a la condición estacionaria, al principio no diferirá mucho de la solución estacionaria, pero en el largo plazo se apartará de ella. A este tipo de soluciones estacionarias se les llama **inestables**.

La ecuación asociada al mecanismo de Walras es

$$p'(t) = \alpha\left[(b_1 + b_2) - (m_1 + m_2)p(t)\right]$$

por lo que el precio debe evolucionar de acuerdo a

$$y(t) = ce^{-\alpha(m_1+m_2)t} + \frac{b_1 + b_2}{m_1 + m_2}$$

y como $-\alpha(m_1 + m_2) < 0$ se tiene que la solución estacionaria

$$p^* = \frac{b_1 + b_2}{m_1 + m_2}$$

es estable. De hecho, la solución estacionaria es precisamente el precio de equilibrio del mercado y el mecanismo de Walras garantiza que cuando el mercado no está en equilibrio, entonces el precio tenderá a aproximarse al precio de equilibrio.

Example 21 *CSI: Neza York*

La detective Sara Sidle debe ayudar a la DEA a determinar la hora del asesinato del líder del cártel de Neza York. El cuerpo fue encontrado a las 10 de la mañana en el cuarto de un hotel. Sara observó inmediatamente que la temperatura del cadáver había descendido a 27^{o}, mientras que la temperatura de la habitación se había mantenido constante en 23^{o}. Sara sabe que la temperatura $T(t)$ de un objeto se rige por la *Ley de Enfriamiento de Newton* que establece que la tasa de cambio en la temperatura es proporcional a la diferencia de la temperatura entre el objeto y el medio ambiente, esto es,

$$T' = -k(T - T_a),$$

donde T_a representa la temperatura del medio ambiente y k es una constante positiva que depende de propiedades físicas del objeto, así como de características del medio ambiente. Esta ecuación diferencial se puede escribir como

$$T' + kt = kT_a$$

cuya solución, cuando T_a es constante, es $T(t) = ce^{-kt} + T_a$. En pruebas de laboratorio con condiciones semejantes Sara sabe que la temperatura del cuerpo humano desciende de 37 a 32 grados en 4 horas. Esto da origen a dos ecuaciones,

$$\begin{aligned} T(0) &= c + 23 = 37 \\ T(4) &= ce^{-4k} + 23 = 32. \end{aligned}$$

que nos permiten determinar los parámetros $c = 14$ y $k = 0{,}11$. Así, la temperatura del cadáver se enfría de acuerdo a

$$T(t) = 14e^{-0{,}11t} + 23.$$

que alcanza los 27 grados cuando

$$14e^{-0{,}11t} + 23 = 27.$$

Al despejar t de esta ecuación se obtiene que $t = 11{,}39$, que le permite a Sara estimar que el capo falleció 11 horas y 23 minutos horas antes de las 10 de la mañana, esto es, como a las 10:37 de la noche.

Consideremos el modelo de ingreso nacional donde

$$(i)\ Y = C + I,\ \ (ii)\ I = kC' \ \text{ y } \ (iii)\ C = aY + b,$$

donde k, a y b son constantes positivas y además $a < 1$. La primera ecuación simplemente descompone al ingreso en consumo e inversión. La segunda señala que la inversión es proporcional a la tasa de cambio del consumo y en la última ecuación podemos identificar al parámetro a como la propensión marginal al consumo. Dado que los tres supuestos involucran a consumo es conveniente expresar la primera ecuación en términos de él:

$$C + kC' = (1/a)(C - b)$$

que equivale a

$$C' + \frac{a-1}{ak}C = -\frac{b}{ak}.$$

Por el teorema anterior sabemos que debe existir una constante m tal que

$$C(t) = me^{\frac{1-a}{ak}t} + \frac{b}{1-a}.$$

Una vez que tenemos identificado al consumo podemos determinar al ingreso y a la inversión, ya que

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{1}{a}\left[C(t) - b\right] \\ &= \frac{m}{a}e^{\frac{1-a}{ak}t} + \frac{b}{a(1-a)} - \frac{b}{a} \\ &= \frac{m}{a}e^{\frac{1-a}{ak}t} + \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

Observemos ahora que como

$$\frac{1-a}{ak} > 0,$$

el ingreso y el consumo serán crecientes cuando la constante $m > 0$. Esto sucede precisamente cuando el valor inicial del ingreso $Y(0) = Y_0$ es mayor que la solución estacionaria $b/(1-a)$.

Analicemos ahora el modelo de crecimiento económico para un país en vías de desarrollo donde se satisfacen los siguientes tres supuestos:

$$(i)\ Y(t) = \sigma K(t),\ \ (ii)\ K'(t) = \alpha Y(t) + H(t)\ \ \text{y}\ \ (iii)\ N'(t) = \rho N(t).$$

La primera ecuación considera una función de producción lineal con un único factor de producción, el capital. A la constante σ se le conoce como **productividad media del capital**. En la segunda ecuación α representa la tasa de ahorro y nos descompone el crecimiento de capital en el ahorro interno $\alpha Y(t)$ más la inversión extranjera $H(t)$. La última ecuación señala que la población $N(t)$ crece a una tasa constante ρ. Si sustituimos $\sigma K(t)$ por el ingreso en la segunda ecuación se obtiene la ecuación lineal de primer orden

$$K'(t) - \alpha\sigma K(t) = H(t).$$

Esta ecuación difiere de la que estudiamos previamente en que el término no-homogéneo $H(t)$ no es constante. Es fácil ver que el mismo argumento que empleamos para las ecuaciones en diferencias lineales no-homogéneas se aplica para las ecuaciones diferenciales de modo que también se tiene que la solución general de la ecuación diferencial se puede expresar como la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular. Más aun, podemos emplear el método de los coeficientes indeterminados para encontrar soluciones particulares cuando el término no-homogéneo es sencillo. En el siguiente ejemplo aplicamos estas ideas a un par de casos de funciones $H(t)$.

Example 22

(a) Supongamos primero que la nación en vías de desarrollo recibe un flujo de capital extranjero $H(t) = mt + b$, de manera que la ecuación a estudiar es

$$K'(t) - \alpha\sigma K(t) = mt + b.$$

Proponemos una solución particular de la forma $K_p(t) = At + B$. Esta solución debe satisfacer por tanto

$$\begin{aligned} mt + b &= K_p'(t) - \alpha\sigma K_p(t) \\ &= A - \alpha\sigma(At + B) \\ &= -A\alpha\sigma t + (A - B\alpha\sigma). \end{aligned}$$

La única forma en que se satisfaga esta ecuación para todo valor t es que

$$\begin{aligned} -A\alpha\sigma &= m \\ A - B\alpha\sigma &= b, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$A = -\frac{m}{\alpha\sigma} \quad \text{y} \quad B = -\frac{m}{\alpha^2\sigma^2} - \frac{b}{\alpha\sigma},$$

por lo que la solución particular encontrada es

$$K_p(t) = -\left(\frac{m}{\alpha\sigma}t + \frac{m}{\alpha^2\sigma^2} + \frac{b}{\alpha\sigma}\right).$$

La solución general de la ecuación es entonces

$$K(t) = ce^{\alpha\sigma t} - \left(\frac{m}{\alpha\sigma}t + \frac{m}{\alpha^2\sigma^2} + \frac{b}{\alpha\sigma}\right).$$

A partir de la ecuación $Y(t) = \sigma K(t)$ es inmediato obtener una fórmula para el ingreso:

$$Y(t) = c\sigma e^{\alpha\sigma t} - \left(\frac{m}{\alpha}t + \frac{m}{\alpha^2\sigma} + \frac{b}{\alpha}\right).$$

Estudiemos ahora el ingreso per cápita

$$y(t) = \frac{Y(t)}{N(t)}.$$

Del último supuesto del modelo tenemos que $N(t) = N_0 e^{\rho t}$. En el largo plazo, el ingreso per cápita viene dado por

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{c\sigma e^{\alpha\sigma t} - \left(\frac{m}{\alpha}t + \frac{m}{\alpha^2\sigma} + \frac{b}{\alpha}\right)}{N_0 e^{\rho t}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{c\sigma e^{\alpha\sigma t}}{N_0 e^{\rho t}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{c\sigma}{N_0} e^{(\alpha\sigma-\rho)t}. \end{aligned}$$

Distinguimos tres casos dependiendo de la relación entre el crecimiento económico y el crecimiento de la población: si $\alpha\sigma > \rho$ el ingreso per cápita crece indefinidamente, si $\alpha\sigma < \rho$ entonces el ingreso per cápita tiende a cero, mientras que si $\alpha\sigma = \rho$ el ingreso per cápita tiende a estabilizarse en un valor fijo.

(b) Como segundo ejemplo analicemos ahora el caso en que la inversión extranjera crece exponencialmente: $H(t) = H_0 e^{\mu t}$, así que se tiene ahora la ecuación

$$K'(t) - \alpha\sigma K(t) = H_0 e^{\mu t}.$$

Resulta natural proponer una solución particular del tipo $Ae^{\mu t}$. Al sustituir esta expresión en la ecuación se tiene

$$A\mu e^{\mu t} - \alpha\sigma A e^{\mu t} = H_0 e^{\mu t}$$

que al dividir por $e^{\mu t}$ se reduce a

$$A\mu - \alpha\sigma A = H_0$$

de donde vemos inmediatamente que

$$A = \frac{H_0}{\mu - \alpha\sigma},$$

y por tanto, el capital viene dado por

$$K(t) = ce^{\alpha\sigma t} + \frac{H_0}{\mu - \alpha\sigma} e^{\mu t}.$$

Cuando la solución particular propuesta falla se recomienda multiplicar ésta por t. Por ejemplo, para la ecuación $y' - 2y = 3e^{2t}$ es razonable considerar una solución particular del tipo $y_p(t) = Ae^{2t}$. Sin embargo, al sustituir en la ecuación se tendría

$$2Ae^{2t} - 2Ae^{2t} = 3e^{2t},$$

que no tiene solución ya que el lado izquierdo de la ecuación es igual a cero. Consideramos entonces $y_p(t) = Ate^{2t}$. Se debe satisfacer ahora

$$(Ae^{2t} + 2Ate^{2t}) - 2Ate^{2t} = 3e^{2t}.$$

Al cancelar los términos del lado izquierdo se llega a $Ae^{2t} = 3e^{2t}$, por lo que A debe ser igual a 3. La solución general de $y' - 2y = 3e^{2t}$ es por lo tanto $y = ce^{2t} + 3te^{2t}$.

3.2. Ecuación de Bernoulli

Los primeros casos de Sida en México fueron diagnosticados a partir de 1983. Si bien en ese entonces el número de enfermos era pequeño, su tasa de crecimiento era muy elevada. De hecho, entre 1983 y 1987 el número de diagnósticos más o menos se duplicaba cada año. De haber continuado a este ritmo después de 20 años el número de enfermos diagnosticado hubiese alcanzado el total de la población del país. Existen modelos epidemiológicos que explican cómo se dispersa una enfermedad y aquí presentaremos algunas ideas sencillas de un modelo de crecimiento limitado. El modelo de crecimiento exponencial corresponde a una ecuación de la forma

$$P' = \alpha P$$

que significa que el crecimiento de la población de enfermos es proporcional al número de enfermos. Este supuesto no contempla que no todas las personas están sujetas al mismo riesgo de contraer la enfermedad. En algunas enfermedades es posible determinar una población de alto riesgo de tal forma que el número de contagios es a su vez proporcional a los individuos de esta población de alto riesgo no contaminados. Esto significa que al disminuir el número de individuos sanos de la población de alto riesgo disminuye a su vez la tasa de contagio. Si denotamos por N al total de los individuos de la población de alto riesgo, entonces en la ecuación

$$P' = \alpha P(N - P)$$

se contempla que la tasa de crecimiento depende tanto del número de enfermos como del número de individuos sanos en riesgo de contraer la enfermedad. Como se trata de modelar el crecimiento de la población enferma debemos tomar $\alpha > 0$.

Esta ecuación diferencial se conoce como **ecuación de crecimiento logístico** y puede ser expresada como

$$P' - \alpha NP = -\alpha P^2$$

y resulta no-lineal. Fue estudiada por primera vez por Jakob Bernoulli en 1697 para modelar la epidemia de viruela en Europa. Existe afortunadamente un truco sencillo que nos permitirá encontrar su solución. De forma más general consideremos ecuaciones del tipo

$$y' + ay = y^m b(t)$$

llamadas **ecuaciones de Bernoulli**. Si dividimos por y^m la ecuación toma la forma

$$y^{-m}y' + ay^{1-m} = b(t).$$

Si $z(t) = y^{1-m}(t)$, entonces $z'(t) = (1-m)y^{-m}(t)y'(t)$. Así, si multiplicamos la ecuación anterior por $1-m$ obtenemos la ecuación lineal

$$z' + (1-m)az = (1-m)b(t)$$

que podemos resolver. Un vez que se conoce la función z es fácil obtener la función y que buscamos.

Example 23

Resolvamos la ecuación $y' - y = ty^5$ con condición inicial $y(0) = 1$. Apliquemos el truco: dividir por y^5 para obtener

$$y^{-5}y' - y^{-4} = t,$$

y por tanto sustituimos $z = y^{-4}$. Como $z' = -4y^{-5}y'$ simplemente multiplicamos por -4 y obtenemos

$$z' + 4z = -4t.$$

Busquemos ahora una solución particular de esta ecuación lineal. Puesto que el término no-homogéneo es un polinomio de primer grado es razonable considerar una solución de la forma $At + B$. Al sustituir en la ecuación se debe tener

$$A + 4(At + B) = -4t$$

cuya solución es $A = -1$ y $B = 1/4$. La solución general de la ecuación lineal es por tanto

$$z = ce^{-4t} - t + 1/4.$$

Pero como $z = y^{-4}$ se tiene

$$y = \frac{1}{z^{1/4}} = \frac{1}{\left(ce^{-4t} - t + 1/4\right)^{1/4}}.$$

A partir de

$$1 = y(0) = \frac{1}{\left(c + 1/4\right)^{1/4}}$$

es posible ver que $c = 3/4$. La solución es entonces

$$y = \frac{1}{((3/4)e^{-4t} - t + 1/4)^{1/4}}.$$

Retomemos nuestro modelo de la epidemia del sida en México. Al dividir la ecuación logística por P^2 se tiene

$$P^{-2}P' - \alpha N P^{-1} = -\alpha$$

por lo que debemos emplear la sustitución $z = P^{-1}$. Un cambio de signo en la ecuación produce

$$z' + \alpha N z = \alpha.$$

Como esta ecuación tiene coeficientes constantes es inmediato que $z = ce^{-\alpha N t} + 1/N$, y por tanto,

$$P(t) = \frac{1}{ce^{-\alpha N t} + 1/N}.$$

La constante c puede determinarse a partir de el número de enfermos P_0 en $t = 0$. De hecho, es fácil ver que

$$c = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{N}.$$

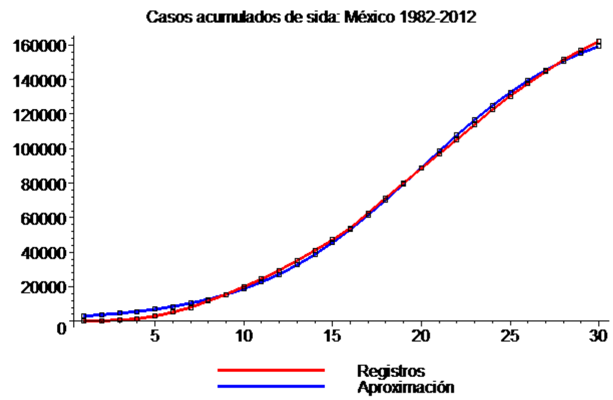
Dado que $0 < P_0 < N$ entonces la constante c resulta positiva. Se tiene entonces que

$$P'(t) = \frac{\alpha N c e^{-\alpha N t}}{(ce^{-\alpha N t} + 1/N)^2} > 0,$$

de modo que la función es estrictamente creciente. Como además

$$\lim_{t\to -\infty} \frac{1}{ce^{-\alpha N t} + 1/N} = 0 \ \text{ y } \ \lim_{t\to\infty} \frac{1}{ce^{-\alpha N t} + 1/N} = N$$

se tiene una una gráfica en forma de la letra 's'. La siguiente figura muestra compara los datos de la Secretaría de Salud con los obtenidos por medio de un modelo logístico.



En ambas curvas se puede observar cómo al inicio de la epidemia la enfermedad avanza de manera exponencial, pero a medida que la población de alto riesgo no infectada empieza a decrecer la tasa de crecimeinto se reduce.

3.3. Ecuaciones autónomas

Hasta ahora sólo hemos desarrollado métodos para resolver ecuaciones lineales de primer orden y los hemos extendido para poder resolver la ecuación de Bernoulli. Una ecuación diferencial de primer orden general puede expresarse como

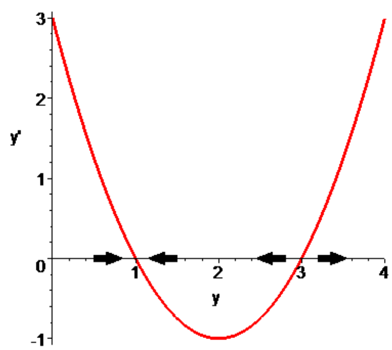
$$y' = f(y,t)$$

donde el lado derecho de la ecuación es una expresión algebraica que especifica cómo cambia la función $y(t)$ dependiendo de los valores de y y t. Por ejemplo, las dos últimas ecuaciones que analizamos son

$$y' = y + ty^5 \quad \text{y} \quad P' = \alpha NP - \alpha P^2.$$

Se dice que la ecuación es **autónoma** cuando la expresión del lado derecho sólo depende del valor de la función y, esto es, $y' = f(y)$. Así, de este par de ejemplos sólo la ecuación logística resulta ser autónoma.

Cuando una ecuación es autónoma es posible estudiar su comportamiento cualitativamente a través de su **diagrama de fase**. Consideremos por ejemplo la ecuación $y' = y^2 - 4y + 3$. Observemos que si en algún momento t_0 se tiene que $y'(t_0) = y(t_0)^2 - 4y(t_0) + 3 > 0$, entonces la función será creciente, mientras que si $y'(t_0) = y(t_0)^2 - 4y(t_0) + 3 < 0$ entonces la función decrecerá. Así, a partir de la gráfica de $y^2 - 4y + 3$ podemos determinar cómo evoluciona la variable y. El diagrama de fase consiste entonces en graficar la expresión $y^2 - 4y + 3$ y observar que la función $y(t)$ crecerá cuando $y(t) < 1$ ó $y(t) > 3$ y decrecerá si $1 < y(t) < 3$.



Los valores $y = 1$ y $y = 3$ donde la gráfica cruza al eje horizontal corresponden a las soluciones estacionarias. Resulta entonces evidente que $y = 1$ es una solución estable, mientras que $y = 3$ es inestable. Observemos que aun cuando no conocemos la expresión analítica de $y(t)$, sí conocemos sus propiedades a largo plazo, ya que por ejemplo si $y(0) = 2{,}9$, entonces $y(t)$ decrecerá y tenderá al valor 1.

La figura anterior sugiere el siguiente criterio para la estabilidad de soluciones estacionarias de ecuaciones autónomas.

Theorem 24 *Si $f(y^*) = 0$, entonces y^* es una solución estacionaria estable de la ecuación diferencial autónoma $y' = f(y)$ si $f'(y^*) < 0$. En caso de que $f'(y^*) > 0$ se tratará de una solución estacionaria inestable.*

Este resultado es a la vez muy útil y muy sencillo de aplicar. Para ilustrarlo consideremos la ecuación logística $P' = \alpha NP - \alpha P^2$. Esta ecuación tiene dos soluciones estacionarias: $P_1 = 0$ y $P_2 = N$. La derivada respecto a P de $f(P) = \alpha NP - \alpha P^2$ es $f'(P) = \alpha N - 2\alpha P$. Como $f'(0) = \alpha N > 0$ resulta que $P_1 = 0$ es un equilibrio inestable. Por otro lado, $P_1 = N$ es estable ya que $f'(N) = -\alpha N < 0$. Además, si $0 < P(0) < N$ se tiene que en el largo plazo $P(t)$ se acercará a N.

Veamos ahora cómo estas ideas pueden ayudarnos a analizar el **modelo de crecimiento de Solow** [12]. En este modelo se tiene una función de producción $Y = Q(K, L)$ que es homogénea lineal, es decir, se tienen rendimientos constantes a escala. Esta función de producción satisface las condiciones usuales

$$Q_K > 0, \quad Q_L > 0, \quad Q_{KK} < 0, \quad Q_{LL} < 0 \ \text{ y } \ Q_{KL} > 0.$$

Requeriremos asimsimo que la función de producción satisfaga

$$Q(0, L) = 0 \ \text{ y } \ Q_K(0, 1) \gg 0.$$

La primer condición señala que sin capital no hay producción. En la segunda condición estamos suponiendo que el producto marginal del capital es suficientemente alto como para que tenga sentido para que se aporte capital para iniciar la actividad económica. En breve seremos más específicos respecto a esta hipótesis.

Se supone además que la fuerza laboral crece a una tasa proporcional λ, es decir, $L' = \lambda L$. Si S e I denotan al ahorro y la inversión supondremos asimismo que

$$S = sY \ \text{ y } \ I = K' + \delta K.$$

Vemos entonces que s es la proporción marginal al ahorro y δ es la tasa de depreciación del capital. Así, K' representa la inversión neta, ya que es aquella que no se destina a reponer el capital depreciado. Finalmente se introducen las variables

$$y = \frac{Y}{L} \ \text{ y } \ k = \frac{K}{L}$$

que representan el producto per cápita y el capital per cápita. Vamos a emplear el hecho de que la función de producción es homogénea lineal para expresar el producto per cápita como

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{Q(K, L)}{L} = Q\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = Q(k, 1) = f(k).$$

Esta función $f(k)$ satisface

$$f(0) = Q(0, 1) = 0, \quad f'(k) = Q_K(k, 1) > 0 \ \text{ y } \ f''(k) = Q_{KK}(k, 1) < 0.$$

Supondremos además que

$$f'(0) = Q_K(0, 1) > (\delta + \lambda)/s.$$

Bajo condiciones de equilibrio se tiene que $I = S$, de donde se llega a

$$K' + \delta K = sY,$$

que reescribimos como

$$K' = sY - \delta K.$$

Si ahora dividimos la ecuación entre K y además el primer término del lado derecho lo multiplicamos y dividimos por L obtenemos

$$\frac{K'}{K} = s\frac{Y}{L}\frac{L}{K} - \delta = \frac{sf(k)}{k} - \delta.$$

Por otro lado,

$$\frac{k'}{k} = \frac{(K/L)'}{K/L} = \frac{\frac{LK'-KL'}{L^2}}{\frac{K}{L}} = \frac{LK' - KL'}{KL} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}.$$

Como además se tiene $L' = \lambda L$, podemos expresar

$$\frac{K'}{K} = \frac{k'}{k} + \lambda.$$

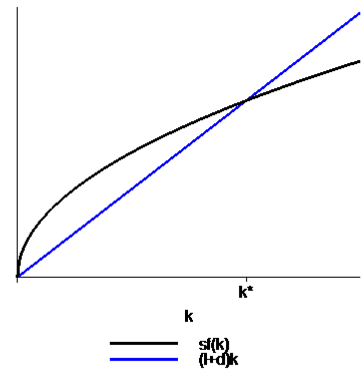
Al igualar las dos expresiones para K'/K tenemos

$$\frac{k'}{k} + \lambda = \frac{sf(k)}{k} - \delta$$

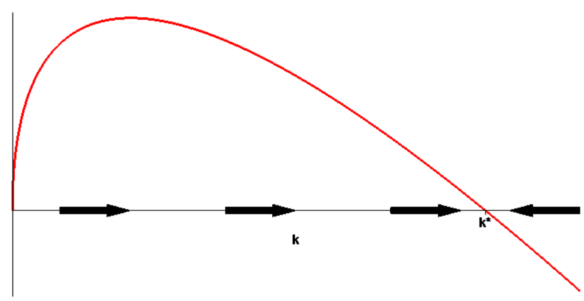
que al despejar k' produce la ecuación autónoma

$$k' = sf(k) - (\lambda + \delta)k.$$

Podemos estudiar esta ecuación por medio de su diagrama de fase. Para ello es conveniente primero graficar por separado a $sf(k)$ y $(\lambda + \delta)k$. Ya habíamos observado que $f(0) = 0$, que f es creciente y cóncava. Como además $f'(0) > (\delta + \lambda)/s$ se tiene que $sf(k)$ crece más rápido que $(\lambda + \delta)k$ para valores de k cercanos a 0. La siguiente figura muestra la forma general de ambas funciones.



Ahora resulta muy sencillo dibujar el diagrama de fase de la ecuación $k' = sf(k) - (\lambda + \delta)k$:



La ecuación $k' = sf(k) - (\lambda + \delta)k$ tiene entonces dos soluciones estacionarias: $k = 0$ y $k = k^*$. La primera es inestable, pero la segunda es estable. Por lo tanto en el largo plazo se tiene que el capital per cápita $k(t)$ converge a k^*. Puesto que el ingreso per cápita está relacionado con el capital per cápita por $y = f(k)$ es claro que por la continuidad de f se tiene que $y(t)$ converge a $f(k^*)$.

Example 25

Consideremos el caso de una función de producción Cobb-Douglas lineal $Q(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$. Con esta función de producción se tiene que $f(k) = Q(k, 1) = Ak^\alpha$. El capital per cápita satisface entonces la ecuación

$$k' + (\lambda + \delta)k = sAk^\alpha$$

que resulta ser de tipo Bernoulli. Procedemos dividiendo por k^α para obtener

$$k^{-\alpha}k' + (\lambda + \delta)k^{1-\alpha} = sA,$$

que después de sustituir $z = k^{1-\alpha}$ se reduce a

$$z' + (1-\alpha)(\lambda + \delta)z = (1-\alpha)sA,$$

cuya solución general es

$$z(t) = ce^{-\mu t} + \frac{sA}{\lambda + \delta},$$

donde $\mu = (1-\alpha)(\lambda + \delta) > 0$. Podemos ahora obtener una expresión para el capital per cápita:

$$k(t) = \left(ce^{-\mu t} + \frac{sA}{\lambda + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)}.$$

En el largo plazo el capital per cápita tiende a

$$k^* = \lim_{t\to\infty} k(t) = \left(\frac{sA}{\lambda + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

y el ingreso per cápita a

$$y^* = \lim_{t\to\infty} y(t) = f\left(\frac{sA}{\lambda + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)} = A\left(\frac{sA}{\lambda + \delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

Cuando se emplea el diagrama de fase para estudiar el comportamiento de una variable se pierde información de qué tan rápido esta variable crece o decrece. Cuando es posible encontrar una solución analítica explícita para la ecuación autónoma podemos comparar el comportamiento real de la variable con la predicción cualitativa del diagrama de fase. Para ilustrar esto consideremos la ecuación logística

$$P' = \alpha P(N - P)$$

cuya solución viene dada por

$$P(t) = \frac{1}{ce^{-\alpha N t} + 1/N}.$$

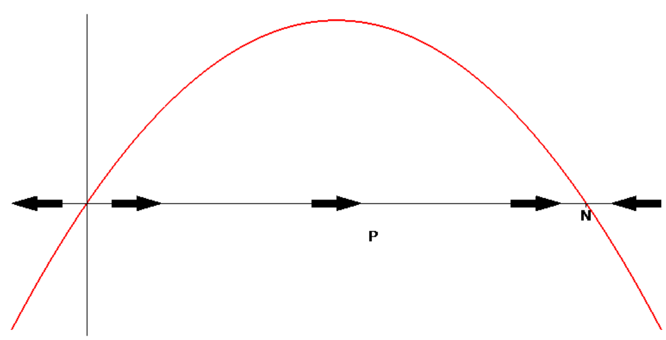
Recordemos que la constante c depende de condiciones iniciales. De hecho, vimos que

$$c = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{N}$$

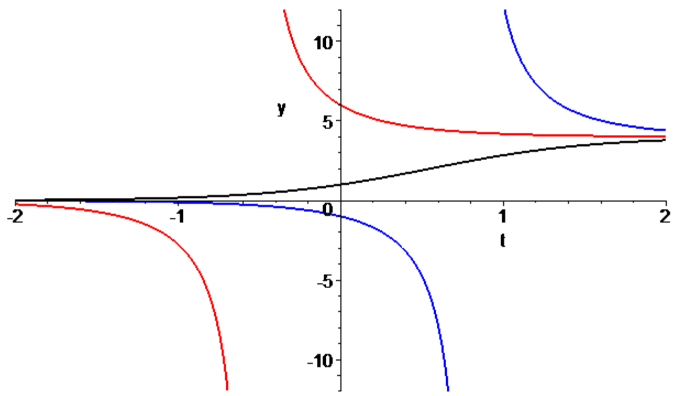
donde $P_0 = P(0)$. Por tanto, c resulta positiva únicamente si $0 < P_0 < N$ que es una condición razonable si estamos modelando una epidemia. Sin embargo, la ecuación diferencial tiene soluciones con c negativa cuando $P_0 > N$ y cuando $P_0 < 0$. Observemos además que independientemente del valor de c se tiene

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{ce^{-\alpha N t} + 1/N} = \frac{1}{0 + 1/N} = N.$$

Sin embargo, el diagrama de fase predice que si $P_0 < 0$ entonces $P(t)$ decrece.



¿Cómo puede entonces alcanzar N que es positivo? En la siguiente figura presentamos las gráficas de tres soluciones de la ecuación logística con $\alpha = 1/2$ y $N = 4$. Cada solución corresponde a los diferentes valores iniciales $P_0 = 1$, 6 y -1. Observemos que la gráfica de la solución asociada a $P_0 = -1$ decrece muy rápidamente y 'alcanza' $-\infty$ muy rápidamente ya que tiene una asíntota vertical. Al continuar la gráfica de esta función después de la asíntota vemos que vuelve a ser decreciente y su límite cuando t tiende a infinito es N como lo habíamos observado. Así, la aparente contradicción puede explicarse porque para ciertos valores de c la solución $P(t)$ no es continua en todos los números reales.



3.4. Ecuaciones separables

Es común en aplicaciones encontrarnos con ecuaciones $y' = F(y,t)$ donde la función F se puede separar como el producto de dos funciones, una de las cuales depende sólo de y y la otra depende sólo de t, esto es, $y' = f(y)g(t)$. Este tipo de ecuaciones se conocen como **ecuaciones separables**. He aquí algunos ejemplos de esta clase de ecuaciones:

$$y' = \frac{t}{3y^2}, \quad y' = \frac{e^{y+t}\sqrt{1+4t^2}}{y^2 t^{1/3}} \quad \text{y} \quad y' = 7y^2 - 4y + 8.$$

Al observar con detenimiento el segundo ejemplo nos damos cuenta que en ocasiones es necesario reescribir la ecuación para que sea claro que se trata de una ecuación separable. Del último de estos ejemplos podemos concluir que las ecuaciones autónomas representan una clase especial de ecuaciones separables, aquellas para las cuales $g(t) = 1$.

Veamos ahora cómo podemos generalizar el procedimiento que empleamos para encontrar las solución general de la ecuación lineal con coeficientes constantes para estudiar ecuaciones separables. Consideremos una ecuación $y' = f(y)g(t)$ y escribámosla de la forma

$$\frac{y'}{f(y)} = g(t).$$

Integrando con respecto a t de ambos lados se tiene

$$\int \frac{y'}{f(y)} dt = \int g(t) dt.$$

Como y es una función de t se tiene $dy = y'dt$, así que

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)dt.$$

A partir de esta ecuación es posible encontrar explícitamente a y siempre y cuando seamos capaces de realizar tres tareas no triviales: resolver cada una de las dos integrales y despejar y de la ecuación resultante. A pesar de estas dificultades el método es bastante útil.

Un cambio de notación nos permite llegar a esta ecuación de manera inmediata sin necesidad de memorizarla. Escribimos la ecuación $y' = f(y)g(t)$ como

$$\frac{dy}{dt} = f(y)g(t)$$

y consideramos el símbolo dy/dt como un cociente. Separamos las variables colocando las y's del lado izquierdo y las t´s del lado derecho de modo que

$$\frac{dy}{f(y)} = g(t)dt.$$

Al integrar esta ecuación nos encontramos de nuevo con

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)dt.$$

Example 26

Para resolver la ecuación

$$y' = \frac{t}{3y^2}$$

con $y(1) = 2$ la reescribimos primero como

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{3y^2}$$

y separamos las variables de tal forma que

$$3y^2dy = tdt.$$

Integramos ahora la ecuación

$$\int 3y^2dy = \int tdt$$

para obtener

$$y^3 = \frac{t^2}{2} + c,$$

donde las constantes de integración las agrupamos del lado derecho como c. Al elevar a la $1/3$ para despejar y se obtiene

$$y = \left(\frac{t^2}{2} + c\right)^{1/3}.$$

De la condición $y(1) = 2$ se deduce que

$$2 = (1 + c)^{1/3}$$

por lo que concluimos que $c = 15/2$. La solución buscada es por tanto

$$y(t) = \left(t^2 + \frac{15}{2}\right)^{1/3}.$$

Aun cuando podamos resolver el par de integrales el problema de despejar la variable y es en la mayoría de las veces muy difícil. En estos casos se dice que se tiene una **solución implícita** de la ecuación. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Example 27

Para resolver

$$y' = \frac{9t^2}{5y^4 + 8y - 3}$$

con $y(0) = 1$ se establece

$$\int 5y^4 + 8y - 3dy = \int 9t^2 dt,$$

de donde se obtiene

$$y^5 + 4y^2 - 3y = 3t^3 + c.$$

Podemos determinar la constante c al sustituir el valor 1 por cada y y el valor 0 por cada t. Así,

$$1 + 4 - 3 = c$$

por lo que $c = 2$. La función $y(t)$ que satisface esta ecuación está definida implícitamente por la ecuación

$$y^5 + 4y^2 - 3y = 3t^3 + 2.$$

Las soluciones estacionarias de una ecuación separable $y' = f(y)g(t)$ corresponden con las raíces de la función f, ya que si $f(y^*) = 0$, entonces la función constante $y(t) = y^*$ satisface la ecuación. Por ejemplo, la ecuación $y' = -2ty^2$ tiene sólo una solución estacionaria, $y^* = 0$. ¿Cómo serán las soluciones cercanas? Para encontrar las soluciones de la ecuación se requiere separar las variables e integrar

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -2tdt$$

de tal modo que se debe satisfacer

$$-\frac{1}{y} = -t^2 + c$$

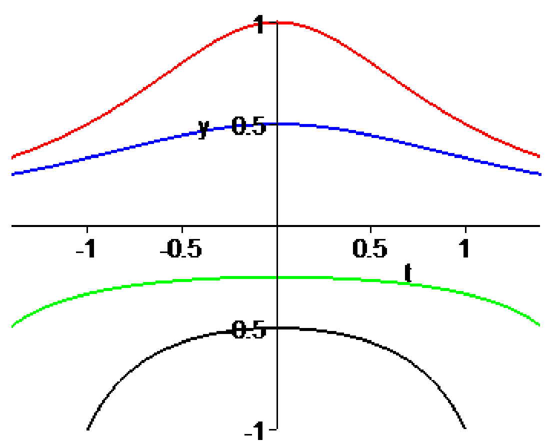
que finalmente establece

$$y = \frac{1}{t^2 + c}.$$

Si $y(0) = y_0$, entonces $c = 1/y_0$ y la solución es

$$y = \frac{1}{t^2 + \frac{1}{y_0}}.$$

En la siguiente figura graficamos las soluciones correspondientes a $y_0 = 1, 1/2, -1/4$ y -1/2.



Aquí observamos que si $y_0 > 0$ la solución tiene forma de campana con asíntota el eje horizontal, mientras que si $y_0 < 0$ las soluciones tienden a alejarse del eje horizontal. Concluimos que la solución estacionaria no es estable pues cualquier perturbación en la condición inicial con $y_0 < 0$ produce soluciones que rápidamente empiezan a apartarse de la solución estacionaria.

3.5. Ecuaciones lineales de segundo orden

La curva de Phillips establece una relación inversa entre la tasa de inflación y la tasa de desempleo. Milton Friedman [4] desarrolló el siguiente modelo que incluye las expectativas de inflación de los agentes. Los supuestos del modelo son:

$$\begin{aligned} i)\ \ w &= f(U) + h\pi \\ ii)\ \ p &= w - T \\ iii)\ \ \pi' &= j(p - \pi) \\ iv)\ \ U' &= -k(m - p). \end{aligned}$$

Aquí w es la tasa de crecimiento del salario, U la tasa de desempleo, p la tasa de inflación, π la tasa de inflación esperada, T es el incremento en la productividad y m la tasa de crecimiento de la moneda nominal. La primera ecuación representa la relación de Phillips al que se le ha añadido el término adicional $h\pi$ sobre cómo la inflación esperada impacta en el crecimiento del salario. Para reflejar la relación inversa entre tasa de crecimiento del salario y la tasa de desempleo es necesario suponer que $f' < 0$. La segunda relación relaciona cómo el alza en la productividad atenúa el impacto del crecimiento del salario sobre la tasa de inflación. El tercer supuesto es de caracter adaptativo y señala el efecto que el diferencial de las tasas de inflación real y esperada tiene sobre la inflación esperada. Finalmente, el último supuesto establece cómo la tasa de crecimiento de la moneda real afecta la tasa de desempleo. Los parámetros h, j y k son positivos y además h y j son menores que 1. A pesar de que contamos con cuatro ecuaciones el número de variables es aun mayor, por lo que consideraremos al aumento en la productividad y a la tasa de crecimiento de la moneda como exógeneas.

Nuestro primer objetivo para analizar este modelo consiste en buscar una ecuación equivalente en la que sólo inntervenga una variable y sus derivadas.

De las dos primeras ecuaciones se tiene

$$p = f(U) + h\pi - T$$

que al sustituir en la tercer ecuación da

$$\begin{aligned}\pi' &= j(f(U) + h\pi - T - \pi) \\ &= j(h-1)\pi + jf(U) - jT.\end{aligned}$$

De esta forma tenemos una ecuación en la que sólo aparecen dos variables, U y π. La única ecuación que no hemos empleado hasta el momento es la última, pero en ella no aparece la tasa de desempleo U sino su derivada. Para poder emplear esta ecuación derivamos con respecto a t la ecuación anterior para obtener

$$\pi'' = j(h-1)\pi' + jf'(U)U'$$

que al emplear la última ecuación del modelo nos da

$$\pi'' = j(h-1)\pi' - jk(m-p)f'(U).$$

Aun cuando ahora volvió aparecer la tasa de inflación p ésta la podemos expresar en términos de la inflación esperada y su derivada usando el tercer supuesto. Así,

$$\begin{aligned}\pi'' &= j(h-1)\pi' - jk(m-p)f'(U) \\ &= j(h-1)\pi' + (kjp - jkm)f'(U) \\ &= j(h-1)\pi' + \left[k(\pi' + j\pi) - jkm\right] f'(U)\end{aligned}$$

que expresamos como

$$\pi'' + \left[j(1-h) - kf'(U)\right]\pi' - kjf'(U)\pi = -jkmf'(U).$$

Si suponemos además que la relación de Phillips es lineal, esto es que $f(U) = \alpha - \beta U$, con α y β positivos, se tiene que $f'(U) = -\beta$ por lo que la ecuación se reduce finalmente a

$$\pi'' + \left[j(1-h) + k\beta\right]\pi' + kj\beta\pi = kj\beta m.$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. A continuación mostramos cómo resolver este tipo de ecuaciones.

Analicemos primero las ecuaciones homogéneas que de forma general son del tipo

$$y'' + ay' + by = 0$$

y supongamos que se tiene una solución de la forma $e^{\lambda t}$. Entonces se debe satisfacer

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0$$

la cual podemos dividir por $e^{\lambda t}$ y obtener la **ecuación característica** de la ecuación

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Al polinomio $\lambda^2 + a\lambda + b$ le llamamos **polinomio característico** y a sus raíces, en un destello de creatividad, **raíces características**. Cuando esta ecuación tiene dos raíces reales diferentes λ_1 y λ_2 obtenemos un par de soluciones diferentes. De hecho, es fácil comprobar que cualquier combinación lineal de estas funciones es a su vez otra solución, así que en este caso tenemos soluciones del tipo

$$y(t) = me^{\lambda_1 t} + ne^{\lambda_2 t}.$$

¿Están descritas todas las soluciones de esta forma? Supongamos que la solución que buscamos satisface las condiciones $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = z_0$. Entonces se debe cumplir

$$\begin{aligned} me^{\lambda_1 t_0} + ne^{\lambda_2 t_0} &= y_0 \\ m\lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + n\lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} &= z_0 \end{aligned}$$

Este es un sistema lineal en las variables m y n. Tiene solución única si el determinante asociado a la matriz del sistema es diferente de cero. Pero este determinante es

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_0} & e^{\lambda_2 t_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t_0} e^{\lambda_2 t_0}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

que es diferente de cero ya que hemos supuesto que las raíces son diferentes. De este modo existen valores únicos de m y n para los cuales se tiene una solución con $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = z_0$.

Veamos ahora que cuando se tienen raíces complejas o raíces reales dobles también es posible encontrar un par de soluciones linealmente independientes. Si las raíces características son del tipo

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \;\text{ y }\; \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

entonces empleamos la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$$

para obtener

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{(\alpha+i\beta)t} \\ &= e^{\alpha t}e^{i\beta t} \\ &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\text{sen}\beta t). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\text{sen}\beta t).$$

Al igual que en el caso anterior, las combinaciones lineales de este par de soluciones producen nuevas soluciones. En particular,

$$(1/2)\left(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\right) = e^{\alpha t}\cos\beta t$$

así como

$$-(i/2)\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) = e^{\alpha t}\text{sen}\beta t$$

nos dan un par de soluciones reales. Podemos expresar otras soluciones al tomar combinaciones lineales de estas soluciones simples:

$$y(t) = me^{\alpha t}\cos\beta t + ne^{\alpha t}\text{sen}\beta t = e^{\alpha t}(m\cos\beta t + n\text{sen}\beta t).$$

Se puede verificar, como en el caso de las raíces reales diferentes, que dadas las condiciones $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = z_0$ existen valores únicos de m y n para los cuales se tiene una solución de la forma $e^{\alpha t}(m\cos\beta t + n\text{sen}\beta t)$.

El caso de las raíces reales dobles se deja como ejercicio. En el siguiente teorema resume estos resultados.

Theorem 28 *La solución general de la ecuación diferencial* $y'' + ay' + by = 0$ *viene dada por*

i) $y(t) = me^{\lambda_1 t} + ne^{\lambda_2 t}$ *si* λ_1 *y* λ_2 *son raíces características reales diferentes.*

ii) $y(t) = e^{\alpha t}(m\cos\beta t + n\,\text{sen}\beta t)$ *si las raíces características son complejas* $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

iii) $y(t) = me^{\lambda_1 t} + nte^{\lambda_1 t}$ *si* λ_1 *es una raíz característica real doble.*

Cuando se trata de ecuaciones no-homogéneas de nuevo podemos descomponer su solución general como la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y de una solución particular. Para ecuaciones de la forma

$$y'' + ay' + by = c$$

se propone una solución particular constante, $y_p(t) = A$ que al sustituir en la ecuación nos da

$$y_p(t) = \frac{c}{b}.$$

Esta es la solución estacionaria de la ecuación. Cuando b es cero la ecuación no tiene soluciones estacionarias.

Example 29

(a) $y'' + y' - 2y = -10$, con $y(0) = 6$, $y'(0) = -5$.

La solución estacionaria de la ecuación es $(-10)/(-2) = 5$. Para analizar la solución de la ecuación homogénea asociada consideramos la ecuación característica $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ que tiene como raíces a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. La solución general viene dada por $y = me^t + ne^{-2t} + 5$. Para determinar las constantes debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} m + n + 5 &= 6 \\ m - 2n &= -5 \end{aligned}$$

para obtener $m = -1$ y $n = 2$. La solución buscada es $y = -e^t + 2e^{-2t} + 5$.

(b) $y'' + y' = -10$.

Esta ecuación no tiene solución estacionaria así que proponemos una solución del tipo $y_p(t) = At$. De la ecuación vemos que

$$y_p'' + y_p' = 0 + A = -10.$$

El polinomio característico $\lambda^2 + \lambda$ tiene de nuevo dos raíces reales diferentes, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 0$. La solución general de la ecuación está entonces dada por

$$y = me^{-t} + ne^{0t} - 10t = me^{-t} - 10t + n.$$

(c) $y'' + 2y' + 17y = 34$, con $y(0) = 3$, $y'(0) = 11$.

Su solución estacionaria es $34/17 = 2$. La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$ tiene ahora raíces complejas $\lambda = -1 \pm 4i$. La solución general es por tanto

$$y = e^{-t}(m\cos 4t + n\text{sen}4t) + 2.$$

Para determinar las constantes debemos primero calcular la derivada de y :

$$y' = -e^{-t}(m\cos 4t + n\text{sen}4t) + e^{-t}(4n\cos 4t - 4m\text{sen}4t).$$

Al sustituir las condiciones iniciales en $t = 0$ se tiene el sistema

$$\begin{aligned} m + 2 &= 3 \\ -m + 4n &= 11 \end{aligned}$$

cuya solución es $m = 1$, $n = 3$. La solución que satisface las condiciones iniciales dadas es

$$y = e^{-t}(\cos 4t + 3\text{sen}4t) + 2.$$

Analicemos ahora la cuestión de la estabilidad de las soluciones estacionarias. Consideremos una ecuación $y'' + ay' + by = c$. Del teorema anterior podemos deducir que la solución estacionaria c/b es estable cuando las raíces características de la ecuación son negativas en el caso de raíces reales. Cuando las raíces son complejas conviene observar que la combinación lineal $m\cos\beta t + n\text{sen}\beta t$ es periódica y por lo tanto acotada. La solución estacionaria en el caso complejo será estable si las raíces tienen parte real negativa. De esta forma, la frase *la solución estacionaria es estable si las raíces tienen parte real negativa* abarca ambos casos. Aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática vemos que

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Supongamos primero que las raíces son reales. Si b fuese negativo, entonces $a^2 - 4b > a^2$ de modo que también se tiene

$$\sqrt{a^2 - 4b} > \sqrt{a^2} = |a|\,.$$

Esto implica que la raíz

$$\lambda = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} > 0$$

independientemente del signo de a. Si por el contrario, b fuese positivo, entonces $a^2 - 4b < a^2$ de modo que también se tiene

$$\sqrt{a^2 - 4b} < \sqrt{a^2} = |a| \, .$$

De aquí vemos que

$$\text{signo}\left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) = \text{signo}(-a)$$

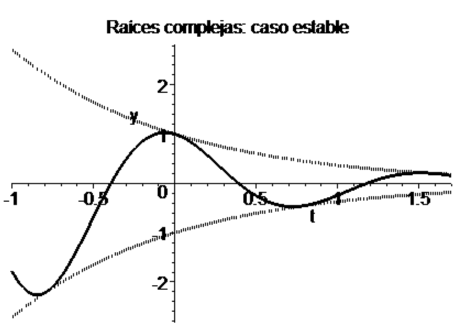
por lo que ambas raíces reales son negativas únicamente cuando, además de $b > 0$, se tiene que $a > 0$. El caso de las raíces complejas es también sencillo de analizar. Puesto que ahora $a^2 - 4b < 0$ se requiere necesariamente que $b > 0$. Como la parte real de las raíces características es

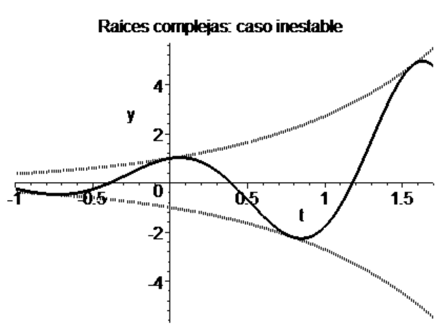
$$-\frac{a}{2}$$

es inmediato que ésta es negativa justo cuando $a > 0$. Así, el criterio es afortunadamente el mismo para los dos casos y lo resumimos en el siguiente resultado.

Theorem 30 *La solución estacionaria c/b de la ecuación $y'' + ay' + by = c$ es estable cuando $a > 0$ y $b > 0$.*

Las siguientes figuras muestran cómo son las soluciones cuando las raíces son complejas.





Podemos ahora analizar el siguiente ejemplo del modelo de inflación y desempleo. Supongamos que se tienen las siguientes relaciones:

$$i)\ p = \frac{1}{6} - 3U + \frac{1}{3}\pi, \quad ii)\ \pi' = \frac{3}{4}(p - \pi) \ \text{ y } \ iii)\ U' = -\frac{1}{2}(m - p).$$

Al sustituir la primera ecuación en la segunda y simplificar obtenemos

$$\pi' = -\frac{1}{2}\pi - \frac{9}{4}U + \frac{1}{8}.$$

Si ahora derivamos respecto a t se llega a

$$\pi'' = -\frac{1}{2}\pi' - \frac{9}{4}U'$$

que empleando ahora la tercer ecuación podemos escribir como

$$\pi'' = -\frac{1}{2}\pi' + \frac{9}{8}(m - p).$$

Si despejamos p de la segunda ecuación y asociamos términos llegamos a la ecuación

$$\pi'' + 2\pi' + \frac{9}{8}\pi = \frac{9}{8}m.$$

El polinomio característico de esta ecuación es $\lambda^2 + 2\lambda + 9/8$ que tiene raíces complejas

$$\lambda = -1 + i\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

La solución general de esta ecuación es

$$\pi(t) = e^{-t}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right) + b\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)\right) + m.$$

A partir de esta fórmula podemos determinar explícitamente también a la tasa de inflación y a la tasa de desempleo. Para ello derivamos la expresión anterior

$$\pi'(t) = e^{-t}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4}b - a\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a + b\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)\right]$$

y empleamos el segundo supuesto para obtener

$$p(t) = \frac{1}{3}e^{-t}\left[\left(\sqrt{2}b - a\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right) - \left(\sqrt{2}a + b\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)\right] + m.$$

Empleando ahora la primera ecuación podemos encontrar que la tasa de desempleo $U(t)$ es igual a

$$\frac{1}{9}e^{-t}\left[\left(2a-\sqrt{2}b\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)+\left(\sqrt{2}a+2b\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)\right]-\frac{2}{9}m+\frac{1}{18}.$$

De estas fórmulas deducimos que en el largo plazo se tiene

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t)=m,\quad \lim_{t\to\infty}p(t)=m \;\text{ y }\; \lim_{t\to\infty}U(t)=-\frac{2}{9}m+\frac{1}{18}.$$

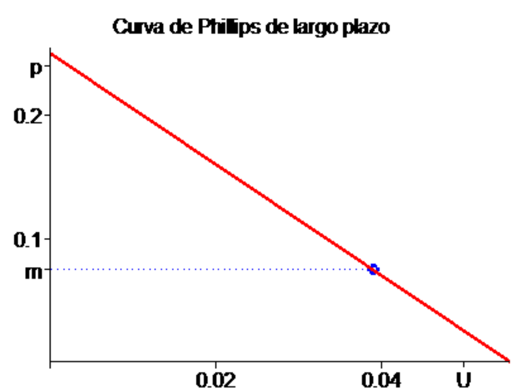
Así, en el largo plazo las tasas de inflación esperada e inflación real tienden a identificarse entre sí al converger ambas a la tasa de crecimiento de la moneda nominal. En particular, para valores de t muy grandes

$$U(t)\approx-\frac{2}{9}m+\frac{1}{18}\approx-\frac{2}{9}p(t)+\frac{1}{18}$$

que podemos identificar con la curva de Phillips de largo plazo:

$$p=-\frac{9}{2}U+\frac{1}{4}$$

cuya gráfica mostramos a continuación. En el largo plazo la tasa de desempleo y la inflación tienden al punto sobre la curva de Phillips con altura m.



¿El comportamiento en el modelo de Friedman en el largo plazo será en general igual al del caso numérico que acabamos de resolver? La ecuación que determina la inflación esperada es

$$\pi''+[j(1-h)+k\beta]\,\pi'+kj\beta\pi=kj\beta m$$

de modo que la solución estacionaria es siempre la tasa de crecimiento de la moneda nominal

$$\frac{jk\beta m}{jk\beta} = m.$$

Puesto que $0 < h < 1$ se tiene que $j(1-h) + k\beta > 0$ y $kj\beta > 0$ por lo que en largo plazo $\pi(t) \to m$. Observemos que al estabilizarse π su derivada tiende a cero de modo que de la relación

$$\pi' = j(p - \pi)$$

se deduce que en el largo plazo $p(t) \approx \pi(t)$, esto es, también $p(t) \to m$. De forma análoga se demuestra, empleando ahora la relación

$$U' = -k(m - p),$$

que la tasa de desempleo también se estabiliza en el largo plazo. Al combinar los dos primeros supuestos habíamos obtenido

$$\begin{aligned} p &= f(U) + h\pi - T \\ &= \alpha - \beta U + h\pi - T. \end{aligned}$$

La curva de Phillips de largo plazo se obtiene al identificar π con p en la ecuación anterior:

$$p = -\frac{\beta}{1-h}U + \frac{\alpha - T}{1-h}.$$

3.6. Ejercicios

1. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales y determina si su solución converge a su estado estacionario.
   (a) $y' + 5y = 15$, $y(0) = 1$.
   (b) $y' + 5y = 15$, $y(0) = 3$.
   (c) $y' - 5y = -15$, $y(0) = 1$.

2. Supongamos que $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial $y' + ay = b$ tales que

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = L_1 \;\; \text{y} \;\; \lim_{t\to\infty} \psi(t) = L_2$$

   para un par de números reales L_1 y L_2. ¿Es posible que $L_1 \neq L_2$?

3. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

   (a) $y' + y = t,\ \ y(0) = 1.$

   (b) $y' + 5y = 2e^{3t},\ \ y(0) = 3.$

   (c) $y' + 2y = 3e^{-2t},\ \ y(0) = 3.$

4. ¿Puedes ayudar a la D.I. Sara Sidle si la temperatura de la habitación donde se encontró el cadáver hubiese sido $T_a(t) = 23 - 4\text{sen}(\pi t/12)$? (Ver Ejemplo 20) La ecuación que debes resolver es $T' + kT = k(23 - 4\text{sen}(\pi t/12))$. Ayuda: busca una solución particular que sea de la forma $A\cos(\pi t/12) + B\text{sen}(\pi t/12) + C$.

5. Considera el modelo dado por

$$i)\ Y = C + I,\quad ii)\ I = kC' \ \ \text{y}\ \ iii)\ C = aY + b$$

   donde los parámetros k, a y b son positivos y además $a < 1$.

   (a) Encuentra una ecuación diferencial de primer orden que determine el consumo C.

   (b) Obtén fórmulas para $C(t)$ y $Y(t)$.

   (c) Si $Y(0) = Y_0$, ¿qué condición debe satisfacer Y_0 para que el ingreso sea creciente?

6. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones.

   (a) $y' + 2y - ty^3 = 0.$

   (b) $x' + ax = bx^k.$

7. Encuentra las soluciones estacionarias de las siguientes ecuaciones y determina si son estables o inestables.

   (a) $y' = e^{2y}(y-5)(y-4)(y-3).$

   (b) $y' = (y^4 + 16)\cos y.$

8. Considera la ecuación diferencial del inciso (a) del problema 7. Determina el límite de la solución $y(t)$ cuando t tiende a infinito si:

   (a) $y(0) = 2{,}9$. (b) $y(0) = 3{,}1$. (c) $y(0) = 3{,}9$. (d) $y(0) = 4{,}1$.

9. Encuentra las soluciones estacionarias de las siguientes ecuaciones y determina si son estables o inestables.
   (a) $y' = y^2 - 6y + 9.$
   (b) $y' = -\left(y^2 - 6y + 9\right).$
   (c) $y' = y^3.$
   (d) $y' = -y^3.$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales.
    (a) $y' = \frac{t^2}{y^3},\ \ y(1) = 2.$
    (b) $y' = \frac{y^3}{t^2},\ \ y(1) = 2.$
    (c) $y' = y^3 t^2,\ \ y(1) = 2.$
    (d) $y' = 1/(y^3 t^2),\ \ y(1) = 2.$

11. Considera la ecuación general lineal de primer orden $y' + a(t)y = b(t)$ y supón que la función $A(t)$ es una antiderivada de $a(t)$. Demuestra que su solución general puede expresarse como

$$y(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} b(t) dt.$$

    Ayuda: multiplica la ecuación $y' + a(t)y = b(t)$ por $e^{A(t)}$ y analiza el lado izquierdo de la ecuación antes de integrar respecto a t.

12. Resuelve la ecuación $y' + 2ty = t$ empleando la fórmula del problema anterior. Esta ecuación también puede resolverse por medio de separación de variables. Compara tus resultados.

13. Considera la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ y supón que su polinomio característico es $\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)^2$. Demuestra que la función $te^{\lambda_1 t}$ es una solución.

14. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones:
    (a) $y'' + 3y' - 4y = 12,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -1.$
    (b) $y'' + 6y' + 5y = 10,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 1.$
    (c) $y'' + 8y'^{+}16y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1.$
    (d) $y'' + 4y'^{+}8y = 2,\ \ y(0) = 9/4,\ \ y'(0) = 4.$

15. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones.
    (a) $y'' + 5y' + 3y = 6t^2 - t - 1$.
    (b) $y'' + y' + 3y = \text{sen}(t)$.
    (c) $y'' + 3y' - 4y = 2e^{-4t}$.

16. Considera la ecuación $y''+ay'+by = 0$ y supon que las raíces característicoas son de la forma $\lambda = \alpha + i\beta$. Demuestra que si t_0 es un tiempo cualquiera existe una combinación lineal única $me^{\alpha t}\cos\beta t + ne^{\alpha t}\text{sen}\beta t$ que satisface las condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = z_0$.

17. Generaliza las ideas aquí presentadas para resolver la ecuación lineal de cuarto grado
$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 14y'' + 16y' + 8y = 24.$$
(Ayuda: $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 14\lambda^2 + 16\lambda + 8 = (\lambda + 2)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$.)

18. Considera el modelo de inflación y desempleo donde
$$i)\ p = \frac{1}{4} - 2U + \pi, \quad ii)\ \pi' = \frac{1}{2}(p - \pi) \ \text{ y } \ iii)\ U' = -\frac{1}{4}(m - p).$$
    (a) Encuentra la ecuación de segundo orden que debe satisfacer π.
    (b) Encuentra fórmulas explícitas para π, p y U.
    (c) Determina la curva de Phillips de largo plazo.

Capítulo 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Uno de los objetivos de la teoría económica es analizar cómo interactúan de manera simultánea dos o más variables económicas a través del tiempo. Los sistemas de ecuaciones diferenciales proporcionan el marco matemático ideal para modelar estas situaciones.

4.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideremos un mercado duopólico con demanda lineal $p = N - mq$ y denotemos a las producciones de las dos firmas por q_1 y q_2. Supongamos además que las empresas tienen costos lineales, $c_1 = a_1 + b_1 q_1$ y $c_2 = a_2 + b_2 q_2$. Los beneficios de la primera empresa son por tanto

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= [N - m(q_1 + q_2)]\, q_1 - (a_1 + b_1 q_1) \\
&= (N - b_1)\, q_1 - m q_1^2 - m q_1 q_2 - a_1.
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\pi_2 = (N - b_2)\, q_2 - m q_2^2 - m q_1 q_2 - a_2.$$

Cuando la primera firma observa que el nivel de producción de su competidor es q_2, reacciona y establece su producción maximizando sus beneficios. Las condiciones de primer orden del óptimo son

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = N - b_1 - 2mq_1 - mq_2 = 0.$$

Al despejar q_1 de esta ecuación obtenemos la curva de reacción de la primera empresa:

$$q_1^* = \frac{N - b_1}{2m} - \frac{1}{2} q_2.$$

Como las funciones de costos de ambas empresas son lineales la curva de reacción de la segunda empresa se obtiene simplemente intercambiando los subíndices 1 y 2:

$$q_2^* = \frac{N - b_2}{2m} - \frac{1}{2} q_1.$$

Sin embargo, las empresas no pueden en general cambiar sus producciones de forma brusca ya sea por razones tecnológicas, de capital o laborales. Supondremos que los niveles de producción $q_1 = q_1(t)$ y $q_2 = q_2(t)$ evolucionan con el tiempo de manera continua. Al observar en el mercado que su competidor produce $q_2(t)$ unidades, la primera firma buscará dirigir su producción hacia el óptimo

$$q_1^*(t) = \frac{N - b_1}{2m} - \frac{1}{2} q_2(t),$$

así que cuando el nivel de producción $q_1(t)$ es menor que el óptimo $q_1^*(t)$ elevará su producción, mientras que si por el contrario $q_1(t)$ es mayor que el óptimo $q_1^*(t)$, entonces disminuirá el ritmo de producción. Esta situación se representa por medio de la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
q_1' &= k_1 \left(q_1^* - q_1\right) \\
&= k_1 \left(\frac{N - b_1}{2m} - \frac{1}{2} q_2 - q_1 \right) \\
&= -k_1 q_1 - \frac{k_1}{2} q_2 + \frac{k_1 \left(N - b_1\right)}{2m}
\end{aligned}$$

donde k_1 es una constante positiva que depende de la flexibilidad de la empresa para cambiar sus planes de producción. Si la reacción de la segunda empresa de análoga tendremos un sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
q_1' &= -k_1 q_1 - \frac{k_1}{2} q_2 + \frac{k_1 \left(N - b_1\right)}{2m} \\
q_2' &= -k_2 q_2 - \frac{k_2}{2} q_1 + \frac{k_2 \left(N - b_2\right)}{2m}
\end{aligned}$$

que al emplear matrices toma la forma

$$\begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & -\frac{k_1}{2} \\ -\frac{k_2}{2} & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \left(N - b_1\right)/2m \\ k_2 \left(N - b_2\right)/2m \end{pmatrix}.$$

A continuación mostraremos cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales diferenciales con coeficientes constantes que en general podemos expresar como

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

No debe sorprendernos que la solución general de este tipo de sistemas se puede descomponer una vez más como la suma de la solución general del sistema homogéneo asociado y de una solución particular. Comenzaremos por lo tanto analizando sistemas homogéneos. Al igual que con los sistemas de ecuaciones en diferencias, las soluciones dependen de la naturaleza de los valores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Aun cuando la forma en que se determinan estas soluciones es análoga al caso de las ecuaciones en diferencias, hay ciertas peculiaridades que ameritan su presentación.

Supongamos primero que $\mathbf{A}$ tiene dos valores propios reales diferentes λ_1 y λ_2. Elijamos a un par de vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente. Se sabe que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ los vectores son linealmente independientes. Como se trata de dos vectores del plano se tiene que forman una base de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son base, deben existir escalares $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ tales que

$$\mathbf{y}(t) = \alpha(t)\mathbf{v}_1 + \beta(t)\mathbf{v}_2.$$

Por tratarse de una solución se debe satisfacer

$$\begin{aligned} \alpha'(t)\mathbf{v}_1 + \beta'(t)\mathbf{v}_2 &= \mathbf{y}'(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{y}(t) \\ &= \mathbf{A}\left(\alpha(t)\mathbf{v}_1 + \beta(t)\mathbf{v}_2\right) \\ &= \alpha(t)\mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \beta(t)\mathbf{A}\mathbf{v}_2 \\ &= \lambda_1\alpha(t)\mathbf{v}_1 + \lambda_2\beta(t)\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Sin embargo, sabemos que los vectores se expresan de forma única como combinaciones lineales de una base, por lo que deducimos

$$\alpha'(t) = \lambda_1\alpha(t) \;\text{ y }\; \beta'(t) = \lambda_2\beta(t).$$

Las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son por lo tanto de la forma

$$\alpha(t) = me^{\lambda_1 t} \;\text{ y }\; \beta(t) = ne^{\lambda_2 t}$$

de modo que la solución es

$$\mathbf{y}(t) = me^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + ne^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

para ciertas constantes m y n.

Example 31

Resolvamos el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $y_1(0) = 5$ y $y_2(0) = 5$. Aquí la matriz es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y tiene a $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$ como polinomio característico. Luego, sus valores propios son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$. Si elegimos como vectores propios asociados a estos valores a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

la solución general puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = me^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + ne^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que puede reescribirse de la forma

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 3me^{4t} + ne^{-t} \\ y_2(t) &= 2me^{4t} - ne^{-t}, \end{aligned}$$

Para determinar el valor de las constantes establecemos evaluamos en $t = 0$ para generar el sistema

$$\begin{aligned} 3m + n &= 5 \\ 2m - n &= 5 \end{aligned}$$

cuya solución es $m = 2$ y $n = -1$. La solución es por tanto

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 6e^{4t} - e^{-t} \\ y_2(t) &= 4e^{4t} + e^{-t}. \end{aligned}$$

La descripción de las soluciones cuando los valores propios son complejos es un poco más elaborada. Supongamos que los valores propios de la matriz son $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Sea $\mathbf{v}$ un vector propio asociado a $\lambda = \alpha + i\beta$ y descompongamos a $\mathbf{v}$ en la suma de su parte real e imaginaria, digamos que

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}.$$

Es fácil verificar que al igual que en el caso de los valores propios reales

$$e^{(\alpha + i\beta)t}\mathbf{v}$$

es una solución del sistema $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$. Esta solución puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}_1(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t}\mathbf{v} \\
&= e^{\alpha t}e^{i\beta t}\left(\mathbf{r}+i\mathbf{s}\right) \\
&= e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\mathrm{sen}\beta t\right)\left(\mathbf{r}+i\mathbf{s}\right) \\
&= e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\mathbf{r} - \mathrm{sen}\beta t\mathbf{s}\right) + ie^{\alpha t}\left(\mathrm{sen}\beta t\mathbf{r} + \cos\beta t\mathbf{s}\right)
\end{aligned}$$

Si consideramos el otro valor propio $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ es fácil verificar que ahora $\overline{\mathbf{v}}= \mathbf{r}-i\mathbf{s}$ es un vector propio y procediendo como antes vemos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}_2(t) &= e^{\alpha t}\left(\cos\beta t - i\mathrm{sen}\beta t\right)\left(\mathbf{r}-i\mathbf{s}\right) \\
&= e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\mathbf{r} - \mathrm{sen}\beta t\mathbf{s}\right) - ie^{\alpha t}\left(\mathrm{sen}\beta t\mathbf{r} + \cos\beta t\mathbf{s}\right)
\end{aligned}$$

es otra solución del sistema. Sabemos que combinaciones lineales de soluciones producen nuevas soluciones. Escogiendo con cuidado los escalares de las combinaciones obtenemos dos soluciones donde no aparecen números imaginarios:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}_1(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}_2(t) &= e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\mathbf{r} - \mathrm{sen}\beta t\mathbf{s}\right) \\
\frac{1}{2i}\boldsymbol{\psi}_1(t) - \frac{1}{2i}\boldsymbol{\psi}_2(t) &= e^{\alpha t}\left(\mathrm{sen}\beta t\mathbf{r} + \cos\beta t\mathbf{s}\right).
\end{aligned}$$

Este par de soluciones reales es linealmente independiente de modo que cualquier solución $\mathbf{y}(t)$ es ahora una combinación lineal de ellas, esto es,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= me^{\alpha t}\left(\cos\beta t\mathbf{r} - \mathrm{sen}\beta t\mathbf{s}\right) + ne^{\alpha t}\left(\mathrm{sen}\beta t\mathbf{r} + \cos\beta t\mathbf{s}\right) \\
&= e^{\alpha t}\left(m\cos\beta t + n\mathrm{sen}\beta t\right)\mathbf{r}+e^{\alpha t}\left(n\cos\beta t - m\mathrm{sen}\beta t\right)\mathbf{s}.
\end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo veremos que a pesar de verse complicadas estas fórmulas son relativamente sencillas de aplicar.

Example 32

Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

con condiciones iniciales $y_1(0) = 3$ y $y_2(0) = 5$. El polinomio característico del sistema es $\lambda^2 - 10\lambda + 29$. Los valores propios son entonces

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{10 \pm \sqrt{100-116}}{2}\\ &= \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2}\\ &= 5 \pm 2i.\end{aligned}$$

Podemos obtener un vector propio asociado a $5 + 2i$ empleando

$$\begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ (5+2i)-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+2i \end{pmatrix}.$$

Para facilitar un poco los cálculos es conveniente cambiarle de signo y tomar

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}.$$

Al descomponer este vector en su parte real y parte imaginaria se tiene

$$\mathbf{r} + i\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es entonces

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= e^{5t}\left(m\cos 2t + n\operatorname{sen}2t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{5t}\left(n\cos 2t - m\operatorname{sen}2t\right)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} e^{5t}\left(m\cos 2t + n\operatorname{sen}2t\right) \\ e^{5t}\left((m-2n)\cos 2t + (n+2m)\operatorname{sen}2t\right) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Los valores de m y n están caracterizados por las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m-2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de modo que $m = 3$ y $n = -1$. La solución es por lo tanto

$$y_1(t) = e^{5t}\left(3\cos 2t - \mathrm{sen}2t\right)$$
$$y_2(t) = e^{5t}\left(5\cos 2t + 5\mathrm{sen}2t\right).$$

Resta por discutir el caso de los valores propios reales dobles. Supongamos que λ_1 es un valor propio doble asociado al sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que entonces

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}\lambda + \det = \lambda^2 - 2\lambda\lambda_1 + \lambda_1^2$$

por lo que necesariamente

$$\lambda_1 = \frac{\mathrm{tr}}{2} = \frac{a+d}{2}.$$

Supongamos además que la entrada $b \neq 0$. De aquí se obtiene que $d = 2\lambda_1 - a$. Consideremos el vector propio

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}.$$

Sea

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes y forman una base de $\mathbb{R}^2$. Por ser $\mathbf{v}$ un vector propio satisface

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}.$$

El vector $\mathbf{w}$ satisface una condición parecida ya que

$$\begin{aligned}
\mathbf{Aw} &= \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b \\ 2\lambda_1 - a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{v} + \lambda_1 \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Supongamos que $\mathbf{y}(t)$ es una solución cualquiera del sistema. Entonces deben existir escalares $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ tales que

$$\mathbf{y}(t) = \alpha(t)\mathbf{v} + \beta(t)\mathbf{w}.$$

Por tratarse de una solución se debe satisfacer

$$\begin{aligned}
\alpha'(t)\mathbf{v} + \beta'(t)\mathbf{w} &= \mathbf{y}'(t) \\
&= \mathbf{Ay}(t) \\
&= \mathbf{A}\left(\alpha(t)\mathbf{v} + \beta(t)\mathbf{w}\right) \\
&= \alpha(t)\mathbf{Av} + \beta(t)\mathbf{Aw} \\
&= \lambda_1\alpha(t)\mathbf{v} + \beta(t)\left(\mathbf{v} + \lambda_1\mathbf{w}\right) \\
&= \left(\lambda_1\alpha(t) + \beta(t)\right)\mathbf{v} + \lambda_1\beta(t)\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Como en el caso de los valores reales diferentes, sabemos que los vectores se expresan de forma única como combinaciones lineales de una base, por lo que ahora deducimos

$$\beta'(t) = \lambda_1\beta(t) \quad \text{y} \quad \alpha'(t) = \lambda_1\alpha(t) + \beta(t).$$

De forma inmediata vemos que

$$\beta(t) = me^{\lambda_1 t}$$

y, por tanto, $\alpha(t)$ debe ser solución de la ecuación

$$\alpha'(t) - \lambda_1\alpha(t) = me^{\lambda_1 t}.$$

Por medio del método de coeficientes indeterminados se puede encontrar que $mte^{\lambda_1 t}$es una solución particular de esta ecuación lineal de primer orden. Luego,

$$\alpha(t) = ne^{\lambda_1 t} + mte^{\lambda_1 t}.$$

La solución general de la ecuación en el caso de los valores reales dobles es entonces

$$\mathbf{y}(t) = (mt + n)\, e^{\lambda_1 t}\mathbf{v} + me^{\lambda_1 t}\mathbf{w}.$$

Cuando $b = 0$, pero $c \neq 0$ la misma fórmula es válida, sólo que es necesario reemplazar

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Example 33

El sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

tiene como matriz asociada a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Tenemos entonces un valor propio repetido. En este caso

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= (mt + n)\, e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + me^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-mt - n)\, e^{2t} \\ (mt + m + n)\, e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En el siguiente resultado presentamos los tres tipos de solución:

Theorem 34 *La solución general del sistema de ecuaciones*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

está dada por

i) $me^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + ne^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ *si los valores propios* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *tienen a* $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$ *como vectores propios.*

ii) $e^{\alpha t}(m\cos\beta t + n sen\beta t)\,\mathbf{r} + e^{\alpha t}(n\cos\beta t - m sen\beta t)\,\mathbf{s}$ *si* $\alpha + i\beta$ *es un valor propio con vector propio* $\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$.

iii) $(mt+n)\,e^{\lambda_1 t}\mathbf{v} + me^{\lambda_1 t}\mathbf{w}$ *si el valor propio es doble. Si* $b \neq 0$ *se toma*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mientras que si $c \neq 0$ *se toma*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es importante señalar que en el caso de los valores propios dobles las fórmulas del teorema son válidas únicamente si el vector propio $\mathbf{v}$ es precisamente el señalado en el enunciado. Cuando los valores propios son reales diferentes o complejos es posible elegir a los vectores propios de manera arbitraria.

El método de coeficientes indeterminados nos permite resolver sistemas de ecuaciones no-homogéneos cuando los términos no-homogéneos son sencillos. El caso más simple se presenta cuando el término no-homogéneo está dado por un vector constante:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

La solución particular propuesta es también un vector constante

$$\begin{pmatrix} y_1^p(t) \\ y_2^p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Como sus derivadas se anulan, entonces este vector debe satisfacer

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

esto es, A y B son la solución del sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & -e \\ c & d & -f \end{array}\right).$$

Este sistema tiene solución única siempre y cuando el determinante de la matriz sea diferente de cero. Para ilustrar el método consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

La solución particular es la solución del sistema

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -16 \\ -3 & -6 & 18 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -16 \\ 0 & 6 & -30 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \end{aligned}$$

de donde vemos que la solución particular encontrada es

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz se obtienen al factorizar $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 3)(\lambda + 2)$. Eligiendo vectores propios se llega a que la solución es

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = me^{-2t} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + ne^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

La solución particular encontrada se conoce como la **solución estacionaria**, **estado estacionario** o **solución de equilibrio**. Resulta de interés saber cuándo esta solución es estable. En el ejemplo anterior podemos observar que en el largo plazo cualquier solución converge a la solución estacionaria y por lo tanto es estable. Al observar la forma de las posibles soluciones en el teorema notamos que la solución estacionaria será estable cuando los valores propios son negativos en caso de ser reales, o bien, tienen parte real negativa cuando son complejos. Esta situación ya la analizamos cuando estudiamos ecuaciones lineales de segundo orden. Demostramos de hecho que las raíces del polinomio $\lambda^2+a\lambda+b$ tiene parte real negativa cuando $a>0$ y $b>0$. Como el polinomio característico de una matriz 2×2 viene dado por $\lambda^2-\mathrm{tr}\lambda+\det$ obtenemos el siguiente criterio para la estabilidad de la solución estacionaria.

Corollary 35 *La solución estacionaria del sistema* $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{b}$ *es estable si la traza es negativa y el determinante positivo.*

Cuando iniciamos nuestra exposición sobre sistemas de ecuaciones diferenciales dejamos pendiente el análisis del modelo del mercado duopólico. El sistema de ecuaciones resultante es

$$\begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & -\frac{k_1}{2} \\ -\frac{k_2}{2} & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1\left(N-b_1\right)/2m \\ k_2\left(N-b_2\right)/2m \end{pmatrix}.$$

La solución estacionaria de este sistema se obtiene al considerar el sistema de ecuaciones lineales

$$\left(\begin{array}{cc|c} -k_1 & -\frac{k_1}{2} & -k_1\left(N-b_1\right)/2m \\ -\frac{k_2}{2} & -k_2 & -k_2\left(N-b_2\right)/2m \end{array}\right).$$

Este sistema se simplifica considerablemente al dividir el primer renglón por $-k_1$ y el segundo por $-k_2$, ya que entonces el sistema resulta equivalente a

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \left(N-b_1\right)/2m \\ \frac{1}{2} & 1 & \left(N-b_2\right)/2m \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \left(N-b_1\right)/2m \\ 0 & \frac{3}{4} & \left(N-2b_2+b_1\right)/4m \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \left(N-b_1\right)/2m \\ 0 & 1 & \left(N-2b_2+b_1\right)/3m \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (N - 2b_1 + b_2)/3m \\ 0 & 1 & (N - 2b_2 + b_1)/3m \end{array} \right)$$

Para analizar la estabilidad de la solución estacionaria debemos determinar el signo de la traza y del determinante de la matriz. Esto es muy sencillo ya que

$$\mathrm{tr} = -(k_1 + k_2) < 0 \quad \text{y} \quad \det = \frac{3k_1k_2}{4} > 0$$

de modo que la solución estacionaria es estable. Así, independientemente de los niveles de producción iniciales $q_1(0)$ y $q_2(0)$ se tiene que las producciones tienden a estabilizarse en estos niveles

$$q_1(t) \to \frac{N - 2b_1 + b_2}{3m} \quad \text{y} \quad q_2(t) \to \frac{N - 2b_2 + b_1}{3m}.$$

Para interpretar este hecho conviene recordar que las curvas de reacción de las firmas estaban dadas por

$$q_1^* = \frac{N - b_1}{2m} - \frac{1}{2}q_2 \quad \text{y} \quad q_2^* = \frac{N - b_2}{2m} - \frac{1}{2}q_1.$$

Estas funciones señalan los niveles óptimos producción de cada empresa en relación a la producción de su competidor. Es fácil verificar que si la segunda empresa establece su nivel de producción en su valor límite, esto es,

$$q_2 = \frac{N - 2b_2 + b_1}{3m}$$

entonces el nivel óptimo de la primera empresa coincide con el valor límite de $q_1(t)$, ya que

$$q_1^* = \frac{N - b_1}{2m} - \frac{N - 2b_2 + b_1}{6m} = \frac{N - 2b_1 + b_2}{3m}.$$

De manera análoga, si el nivel de producción de la primera firma es

$$q_1 = \frac{N - 2b_1 + b_2}{3m},$$

entonces el nivel óptimo de la segunda es

$$q_2^* = \frac{N - 2b_2 + b_1}{3m}.$$

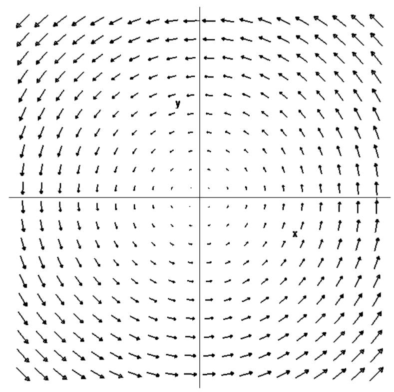
En otras palabras, al establecer sus producciones en estos niveles, ninguna de las dos empresas tiene incentivos para cambiar su producción. Este par de producciones es llamado el **Equilibrio de Cournot** del duopolio.

4.2. Diagramas de fase

De acuerdo a Augusto Monterroso, "hay tres temas: el amor, la muerte y las moscas. Desde que el hombre existe, ese sentimiento, ese temor, esas presencias lo han acompañado siempre"[6]. No es claro que el amor o la muerte puedan ayudarnos a comprender el significado geométrico de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Pero con las moscas, es otra historia.

Pensemos en una mosca que deambula en el plano. La **trayectoria** que describe se representa por un par de funciones diferenciables $(x(t), y(t))$ que establecen las diferentes posiciones de la mosca en el tiempo t. Así, la trayectoria de una mosca que camina a velocidad constante alrededor de una rodaja de limón de radio r está descrita por la trayectoria $(r\cos(t), r\mathrm{sen}(t))$. Si por algún estímulo, como un aroma o la temperatura, nuestra mosca decidiese seguir dando vueltas al limón, pero ahora al doble de velocidad, la nueva trayectoria sería $(r\cos(2t), r\mathrm{sen}(2t))$. Observemos que ambas trayectorias recorren la misma curva, el círculo de radio r con centro en el origen, pero describen movimientos distintos de la mosca. La **velocidad** de la trayectoria $(x(t), y(t))$ en el momento t_0 se define como el vector $(x'(t_0), y'(t_0))$. La dirección de este vector tangente a la trayectoria representa la dirección del movimiento de la mosca cuando se encuentra en $(x(t_0), y(t_0))$, mientras que la magnitud de este vector nos indica la rapidez con la que se desplaza la mosca.

En un verdadero ejercicio de abstracción supongamos que tenemos ahora una mosca autómata que sigue instrucciones precisas que le indican cómo deambular en el plano. La forma en que se asignan las reglas para el movimiento de la mosca pueden ser muy variadas, pero aquí supondremos la mosca tiene un sistema GPS que le indica la dirección y rapidez hacia donde moverse dependiendo del punto del plano en que se encuentra. Por ejemplo, si las instrucciones vienen dadas por vectores como los de la siguiente figura, entonces la mosca seguiría una trayectoria circular. Además, la rapidez del movimiento de la mosca sería mayor entre más grande fuese el círculo que describiese.



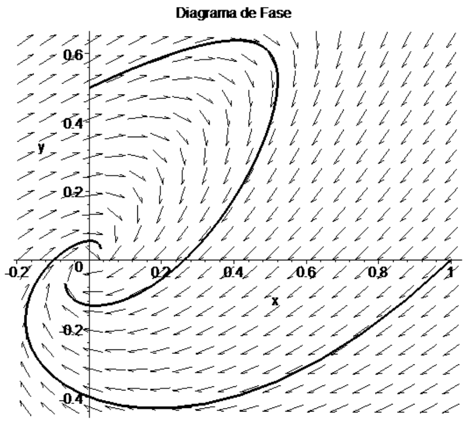
Un sistema de instrucciones para el movimiento de la mosca tipo GPS es descrito al asociar a cada punto (x, y) del plano un vector que determina la velocidad y la rapidez con la que debe desplazarse la mosca. Si denotamos por $f(x, y)$ a la primera componente de este vector y por $g(x, y)$ a la segunda componente, entonces la trayactoria $(x(t), y(t))$ de la mosca es precisamente una solución al sistema de ecuaciones autónomo

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y). \end{aligned}$$

El **diagrama de fase de un sistema de ecuaciones autónomo** consiste en asignar a cada punto (y_1, y_2) del plano un vector que determina únicamente la dirección con la que debe desplazarse la mosca. A diferencia de los diagramas anteriores, no se toma en cosnsideración la magnitud de los vectores. La siguiente figura muestra el diagrama de fase del sistema

$$\begin{aligned} x' &= y - x \\ y' &= y^2 - x \end{aligned}$$

y hemos señalado la trayectoria que siguieron un par de moscas que iniciaron su recorrido en $(x_0, y_0) = (1, 0)$ una de ellas, mientras que la segunda mosca lo inició en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0{,}5)$. Podemos apreciar que ambas moscas realizaron trayectorias en forma de espirales que se acercan al origen.



Resultaría sumamente elaborado y fastidioso elaborar con mucho detalle el diagrama de fase de un sistema de ecuaciones diferenciales en el que colocásemos un vector dirección en una enorme cantidad de puntos del plano. Una estrategia sencilla para predecir las trayectorias que seguirían las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales consiste en dividir al plano en sectores en los cuales sabemos que las trayectorias se mueven de cuatro formas posibles: derecha-arriba, derecha-abajo, izquierda-arriba y izquierda-abajo. Comenzaremos analizando algunos sistemas lineales. Para determinar estas cuatro regiones simplemente graficamos las curvas

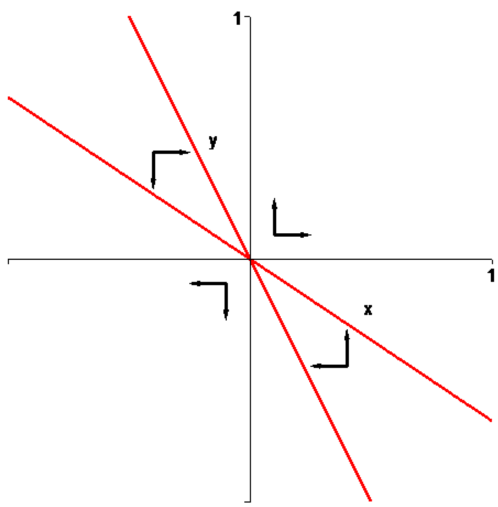
$$x' = f(x, y) = 0 \ \text{ y } \ y' = g(x, y) = 0.$$

A estas curvas se les conoce como **isoclinas.** Observemos que la isoclina $x' = f(x, y) = 0$ divide al plano en regiones donde $x' > 0$ por lo que la componente $x(t)$ es creciente y por tanto las soluciones se mueven hacia la derecha, o bien, donde $x' < 0$ y las soluciones se dirigen hacia la izquierda. De forma análoga, la isoclina $y' = g(x, y) = 0$ separa las regiones donde $y' > 0$ y las soluciones se dirigen hacia arriba, así como donde $y' < 0$ y el movimiento es hacia abajo. La combinación de esta información produce las cuatro regiones.

Para ejemplificar el método consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 3y \\ y' &= 2x + y \end{aligned}$$

En este caso la isoclina $x' = 0$ es la recta $2x + 3y = 0$, mientras que la recta $2x + y = 0$ representa la isoclina $y' = 0$. Para determinar las direcciones horizontales consideramos la isoclina $x' = 0$. Ésta divide al plano en dos semiplanos donde $x' > 0$ y donde $x' < 0$. Para saber cuál semisespacio es cuál basta que evaluemos $f(x, y) = 2x + 3y$ en un punto del primer semiespacio. Por ejemplo los puntos del primer cuadrante están todos en uno de estos semiespacios. Ahí la función $f(x, y) = 2x+3y$ toma siempre valores positivos. Por lo tanto, en el semiplano que está por arriba de la recta $2x + 3y = 0$ las soluciones se mueven hacia la derecha. Un argumento similar muestra que en la región abajo de esta recta $f(x, y) < 0$ y la dirección será hacia la izquierda. Otra forma sencilla de determinar estas direcciones es evaluando la función $f(x, y)$ en un punto de cada región. Por ejemplo, $f(1, 0) = 2 > 0$ y $f(-1, -1) = -5 < 0$. Aquí los puntos $(1, 0)$ y $(-1, -1)$ son arbitrarios y sólo debemos tener la certeza que pertenecen a las diferentes regiones. Si consideramos ahora la isoclina $y' = 0$ y procedemos como arriba es fácil ver que las direcciones de las soluciones irán hacia arriba en el semiplano superior de la isoclina y hacia abajo en el semiplano inferior. En la siguiente figura aparecen las direcciones de las soluciones en cada una de las cuatro regiones.



Hay otra pieza de información que podemos añadir en nuestro análisis del diagrama de fase cuando los valores propios de la matriz del sistema son reales. El polinomio carcaterístico de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

viene dado por $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$. Cada valor propio tiene asociado un subespacio de vectores propios. Cada uno de estos subespacios está formado por los múltiplos de cualquier vector propio. Así, el subespacio asociado al valor propio 4 consiste de la recta parametrizada por

$$s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ 2s \end{pmatrix},$$

y el subespacio asociado al valor propio -1 está formado por los vectores de la forma

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}.$$

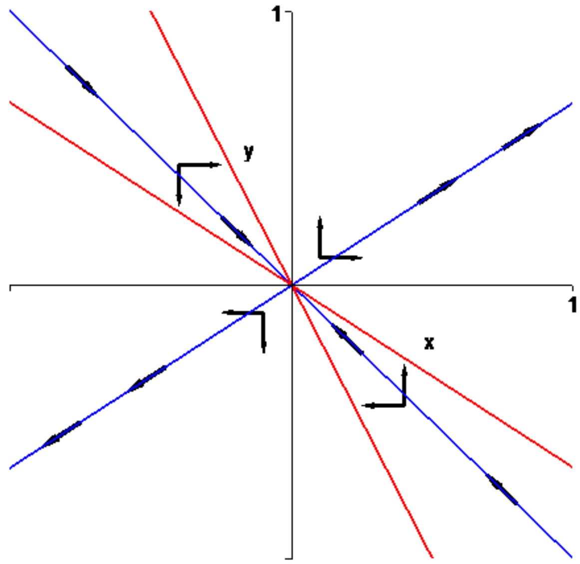
Recordemos que por tratarse de vectores propios, al multiplicar la matriz por cualquier vector de este subespacio se obtiene el mismo vector multiplicado por la λ correspondiente. Por ejemplo para el valor propio -1,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix}$$

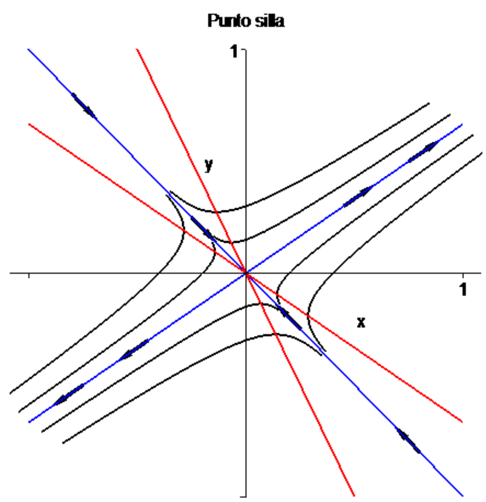
el resultado es el mismo vector con dirección opuesta, mientras que para el valor propio 4 se obtiene el mismo vector multiplicado por 4:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3s \\ 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12s \\ 8s \end{pmatrix}.$$

La consecuencia de este hecho algebraico es que la dirección del movimiento para cualquiera de los puntos de estos subespacios cae dentro del mismo subespacio. Por lo tanto, si la condición inicial cae dentro de uno de estos dos subespacios, la solución ya no se sale de él. En el caso del valor propio -1 la solución se acerca al origen, mientras que para el valor propio 4 la solución se aleja del origen. En la siguiente figura aparece toda la información aquí recabada en relación a las isoclinas y los espacios propios.

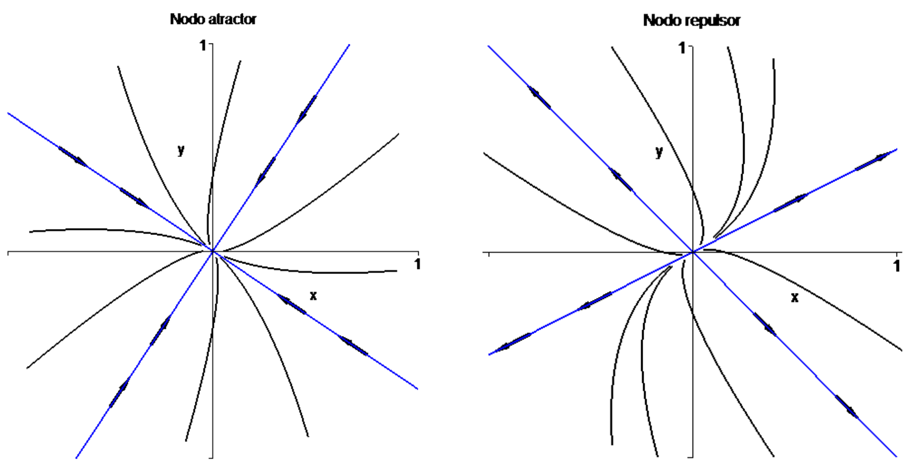


Con la información de las direcciones en cada una de las cuatro regiones y con la de los espacios propios podemos trazar algunos de los vectores de dirección de las soluciones y algunas de las curvas solución.



Cuando la matriz tiene un valor propio positivo y un valor propio negativo se obtiene una figura de este tipo que se conoce como **punto silla**. El nombre viene del movimiento que se tendría si arrojásemos algún líquido espeso sobre la superficie de una silla de montar, entonces en una dirección el líquido tenderá a la base de la silla y en otra dirección se alejará de la base. Al subespacio de vectores propios con valor propio negativo se le llama el **subespacio estable**, mientras que al subespacio de vectores propios con valor propio positivo se le llama **subespacio inestable**.

Hay de hecho otros cuatro tipos genéricos de diagramas de fase para sistemas lineales. Cuando los valores propios son ambos negativos, entonces las soluciones se acercan siempre al origen. La forma asociada se le llama **nodo atractor**. Cuando los valores propios son ambos positivos se tiene una figura similar pero con la dirección de las soluciones alejándose del origen. A este tipo de sistema se le conoce como **nodo repulsor**.



Para el caso de los valores propios complejos de la forma $\lambda = \alpha \pm i\beta$ las soluciones estan dadas por

$$e^{\alpha t}\left(m\cos\beta t + n\text{sen}\beta t\right)\mathbf{r}+e^{\alpha t}\left(n\cos\beta t - m\text{sen}\beta t\right)\mathbf{s}.$$

Observemos que las expresiones dentro de los paréntesis son periódicas y están acotadas. Se puede mostrar que la curva parametrizada por

$$\left(m\cos\beta t + n\text{sen}\beta t\right)\mathbf{r}+\left(n\cos\beta t - m\text{sen}\beta t\right)\mathbf{s}$$

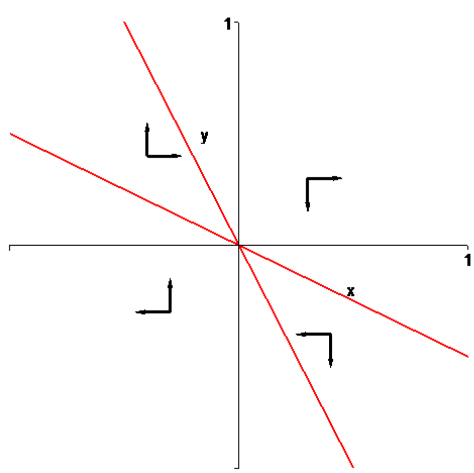
es elíptica. Al multiplicar esta expresión por $e^{\alpha t}$ se tiene que la magnitud de cualquier punto de la solución va ir aumentando si $\alpha > 0$, y va a ir disminuyendo cuando $\alpha < 0$. Las soluciones forman por tanto **espirales atractoras** $\alpha < 0$ y **espirales repulsoras** en el caso en que $\alpha > 0$. Para aclarar esto veamos con detalle el diagrama de fase de un caso específico. Tomemos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

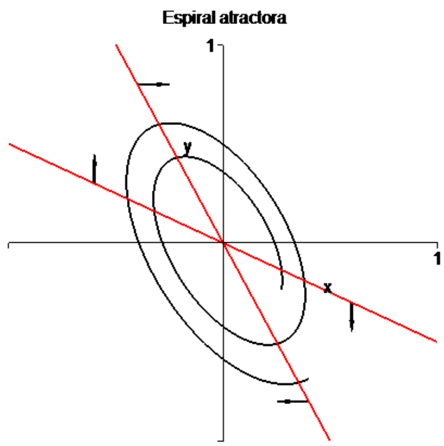
Su polinomio carcaterístico es $\lambda^2 + (1/2)\lambda + 3/2$, de donde es fácil obtener sus valores propios:

$$\lambda = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{23}}{4}.$$

De acuerdo a la discusión previa debemos obtener espirales atractoras pues la parte real de los valores propios es negativa. Las siguientes figuras muestran las isoclinas asociadas a este sistema. En la figura de la izquierda mostramos las direcciones del movimiento en las cuatro regiones en que queda dividido el plano, mientras que en la figura de la derecha sólo aparece la dirección del movimiento a lo largo de las isoclinas. Para obtener esta figura sólo es necesario observar qué dirección tienen en común las regiones separadas por las isoclinas. Puesto que las isoclinas están determinadas por las ecuaciones $y_1' = 0$, o bien, $y_1' = 0$, las direcciones de las soluciones son verticales u horizontales.



A partir de estas figuras podemos ver que las soluciones deben girar en el sentido de las manecillas del reloj, pero no es claro que después de cada giro nos acercamos al origen. Como mencionamos antes, esta información está dada por el signo de la parte real del valor propio. Para este ejemplo las soluciones se van acercando al origen, como se aprecia en la figura.



La clave para distinguir el tipo asociado a un sistema lineal se encuentra en sus valores propios. Puesto que los valores propios dependen del polinomio carcaterístico

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}\lambda + \det,$$

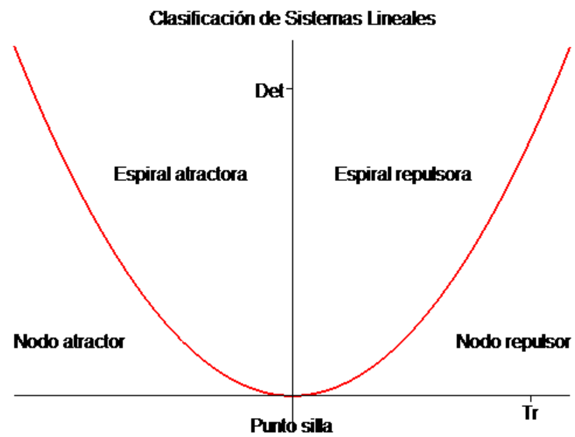
resulta posible determinar el tipo de sistema conociendo la traza y el determinante. De hecho, a partir de la fórmula

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr} \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2 - 4\det}}{2}$$

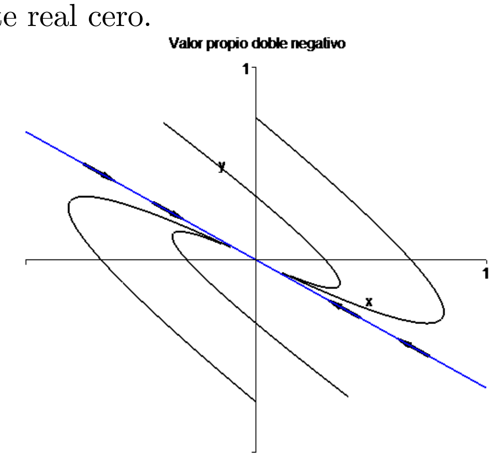
es fácil establecer las condiciones que nos clasifican los cinco tipos:

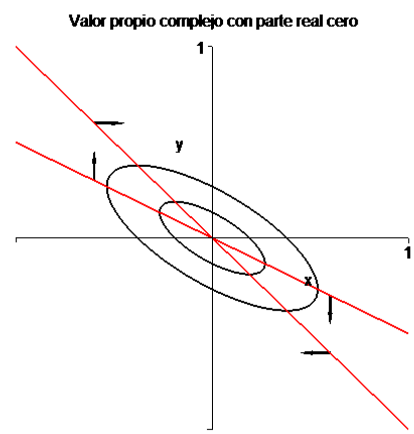
$\lambda_1 > 0, \;\; \lambda_2 > 0$	$\mathrm{tr}^2 > 4\det, \;\; \mathrm{tr} > 0, \;\; \det > 0$	Nodo repulsor
$\lambda_1 < 0, \;\; \lambda_2 < 0$	$\mathrm{tr}^2 > 4\det, \;\; \mathrm{tr} < 0, \;\; \det > 0$	Nodo atractor
$\lambda_1 > 0, \;\; \lambda_2 < 0$	$\det < 0$	Punto silla
$\alpha \pm i\beta, \;\; \alpha > 0$	$\mathrm{tr}^2 < 4\det, \;\; \mathrm{tr} > 0, \;\; \det > 0$	Espiral repulsora
$\alpha \pm i\beta, \;\; \alpha < 0$	$\mathrm{tr}^2 < 4\det, \;\; \mathrm{tr} < 0, \;\; \det > 0$	Espiral atractora

La siguiente figura presenta las cinco regiones asociadas a esta clasificación.



Hay algunos sistemas que no se consideran en esta clasificación. Estos sistemas se conocen como **degenerados** y corresponden a los casos que se sitúan en la frontera de estas regiones: $\det = 0$, $\text{tr}^2 = 4 \det$, o bien, $\text{tr} = 0$ y $\det > 0$. El primer caso corresponde a un valor propio cero, el segundo a los valores propios dobles y el tercero a valores complejos con parte real cero. En las siguientes figuras mostramos los diagramas de fase de los casos correspondientes a valores propios dobles y a valores propios complejos con parte real cero.





En la mayoría de los modelos económicos no se conoce con precisión los parámetros asociados y sólo se dispone de información cualitativa acerca de ellos. Resulta entonces de interés saber qué efectos tienen pequeñas perturbaciones de los parámetros. Para el caso de los modelos dinámicos lineales, conviene observar que las regiones asociadas a los cinco tipos no-degenerados forman conjuntos abiertos del plano. Una consecuencia de este hecho es que si el sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

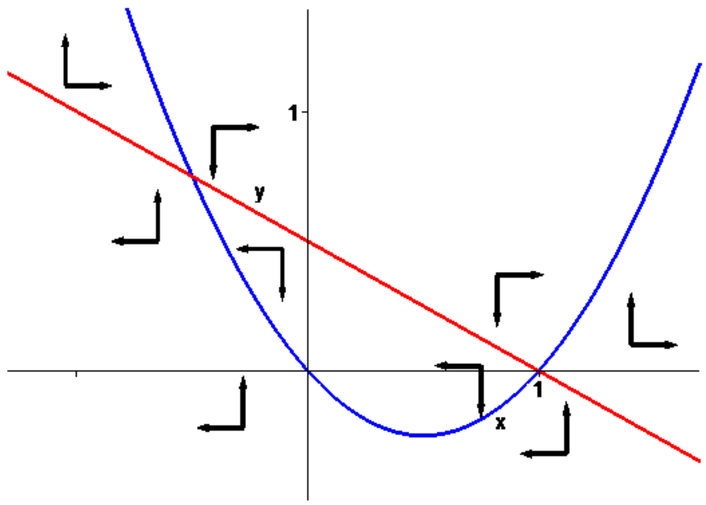
cae dentro de una de estas cinco regiones, entonces pequeñas perturbaciones en las entradas de la matriz no cambian el tipo de sistema. Esto se debe a que cambios pequeños en las entradas producirán cambios pequeños en la traza y el determinante de la matriz perturbada. Por otro lado, perturbaciones en las entradas de la matriz de un sistema degenerado pueden a cambiar la estructura del sistema dramáticamente. Por ejemplo, si tenemos un sistema con traza cero y determinante positivo, entonces sus soluciones son periódicas y forman elipses. Si alteramos muy poco las entradas de la matriz, la nueva matriz puede caer tanto del lado de las espirales atractoras como del lado de las espirales repulsoras.

4.3. Linealización y ecuaciones separables

Veamos ahora cómo aplicar estas ideas para analizar sistemas no-lineales. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 0{,}5x + y - 0{,}5 \\ y' &= x^2 - x - y \end{aligned}$$

La isoclina $x' = 0$ corresponde a la recta $y = -0{,}5x + 0{,}5$. Esta recta divide al plano en dos semiplanos. El punto $(2, 2)$ pertenece al semiplano situado arriba de la recta. Al evaluar la expresión $0{,}5x+y-0{,}5$ en este punto se tiene que $x' = 0{,}5(2) + 2 - 0{,}5 = 2{,}5 > 0$. De aquí concluimos que en el semiplano superior a la recta el movimiento es hacia la derecha, mientras que en el semiplano inferior es hacia la izquierda. La otra isoclina ($y' = 0$) consiste de la parábola $y = x^2 - x$. Esta parábola abre hacia arriba y cruza al eje x en el origen y en el punto $(1, 0)$. Elijamos un punto en la parte superior de esta parábola, el $(0, 1)$ por ejemplo. Si evaluamos $y' = x^2 - x - y$ en $(0, 1)$ tendremos $y' = 0^2 - 0 - 1 = -1 < 0$. Esto nos permite saber que el movimiento arriba de la parábola es hacia abajo, mientras que para los puntos abajo de la parábola las soluciones se desplazan hacia arriba. La figura muestra esta información.



Los puntos donde se cruzan las dos isoclinas corresponden a las soluciones estacionarias ya que estos puntos están caracterizados por satisfacer $x' = 0$ y $y' = 0$. En este caso hay dos de ellos, el $(1, 0)$ y el $(-0{,}5, 0{,}75)$. Por las direcciones del movimiento alrededor de $(1, 0)$ podríamos sospechar que en sus alrededores se comporta como un punto silla, con una dirección en la cual las soluciones se acercan a él y con otra dirección en la cual las soluciones se alejan de él. Para el otro punto estacionario, $(-0{,}5, 0{,}75)$, se puede observar un movimiento giratorio alrededor de él. Sin embargo es difícil distinguir si los giros nos acercan o alejan del punto.

El **teorema de linealización de Hartman-Grobman** que a continuación presentamos nos permite analizar el comportamiento de los sistemas no-lineales en una vecindad de sus puntos estacionarios. Si (a, b) es un punto estacionario aislado del sistema

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y), \end{aligned}$$

entonces el **sistema lineal asociado** se obtiene al reemplazar las funciones f y g por sus aproximaciones de Taylor de primer orden alrededor de (a, b):

$$\begin{aligned} x' &= f_x(x-a) + g_x(y-b) \\ y' &= f_y(x-a) + g_y(y-b). \end{aligned}$$

La matriz asociada a este sistema es la matriz jacobiana evaluada en (a, b)

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}.$$

El teorema de linealización afirma si el sistema lineal asociado es no-degenerado, entonces cerca del punto estacionario (a, b), el sistema original y el sistema lineal asociado tienen el mismo comportamiento.

Theorem 36 *Supongamos que (a, b) es un punto estacionario aislado del sistema*

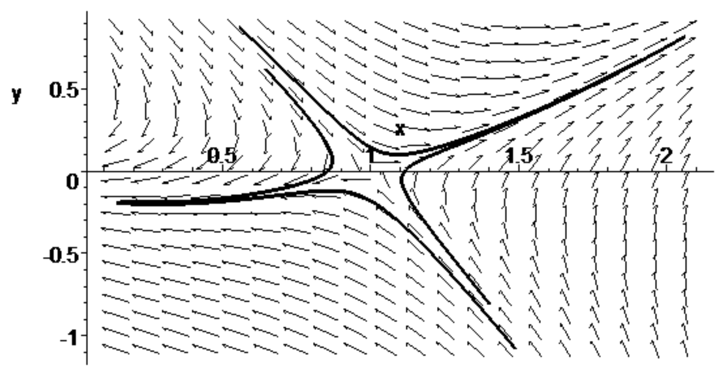
$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y). \end{aligned}$$

Si el sistema lineal asociado es no-degenerado, entonces en una vecindad de (a, b) el sistema original y el lineal son cualitativamente equivalentes.

La importancia de este teorema radica en la dificultad extrema que en general se tiene para resolver explícitamente los sistemas no-lineales. El teorema es una herramienta muy valiosa cuando se requiere analizar la estabilidad y el comportamiento de un sistema de ecuaciones alrededor de un punto estacionario. Veamos cómo aplicar el teorema en el ejemplo que estamos analizando. Ya observamos que los puntos estacionarios son $(1, 0)$ y $(-0{,}5, 0{,}75)$. La matriz de derivadas parciales es

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 2x - 1 & -1 \end{pmatrix}$$

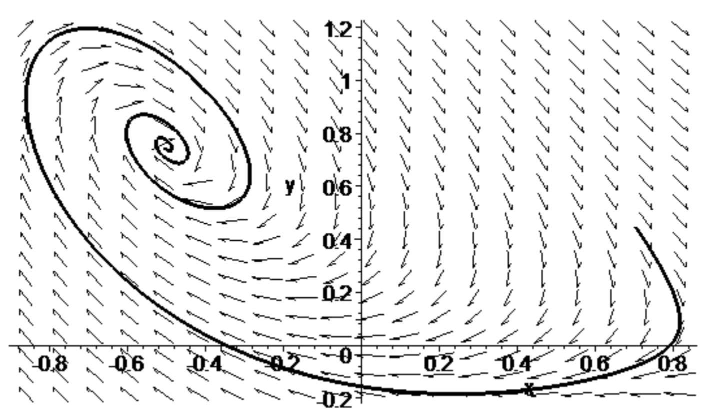
que tiene traza $-0{,}5$ y determinante $0{,}5-2x$. Al evaluar en $(1,0)$ el determinate resulta negativo por lo que el sistema lineal asociado es un punto silla. En la siguiente figura se muestran algunas soluciones alrededor de este punto estacionario. Observemos en particular que las rectas de vectores propios correspondientes a los subespacios estable e inestable se han doblado. Estas curvas reciben el nombre de **variedad estable** y **variedad inestable**.



El determinante en el caso del punto $(-0{,}5, 0{,}75)$ es $1{,}5$. Así, tenemos traza negativa y determinante positivo. El sistema lineal puede ser un nodo atractor o una espiral atractora. Para ello calculamos

$$\mathrm{tr}^2 - 4\det = 0{,}25 - 6 < 0.$$

Los valores propios son por tanto complejos y el sistema corresponde a una espiral atractora.



Example 37 *Modelo Depredador-Presa*

Durante la segunda década del siglo pasado se dio un hecho curioso que despertó el interés de un matemático italiano, Vito Volterra. Su yerno, Humberto D'Ancona, era biólogo e hizo un estudio estadístico de las poblaciones de varias especies en el Mar Adriático. Para ello recopiló las cantidades vendidas de peces y de algunos de sus depredadores como tiburones y mantarrayas. Durante una década la proporción de tiburones que aparecían en la pesca del Mar Adriático sufrió grandes cambios. La siguiente tabla muestra el porcentaje de tiburones y mantarrayas en este periodo.

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
12	21	22	21	36	27	16	15	15	11

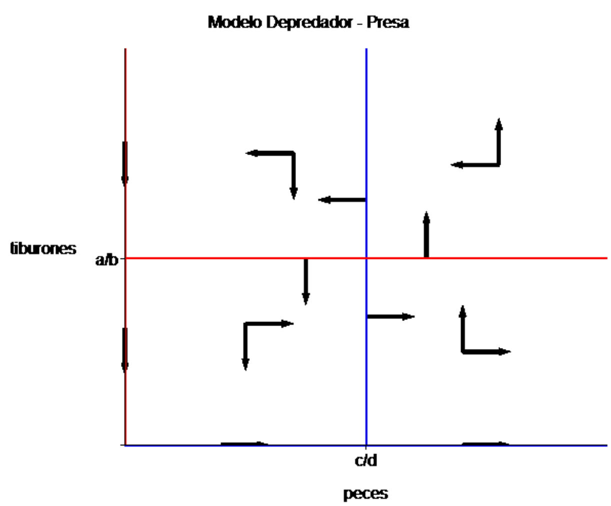
Esto significa que en esta década la proporción de tiburones aumentó considerablemente y despúes disminuyó hasta regresar a su estado inicial. D'Ancona supuso que de alguna forma la Primera Guerra Mundial (1914-1918) era la causante de este fenómeno. ¿Cómo pudo influir este hecho en la ecología del Mar Adriático?

Volterra propuso un sistema de ecuaciones diferenciales que reflejase la interacción entre dos especies: depredadores y presas. Denotemos por $x(t)$ a la población de peces (presas) y por $y(t)$ a la de tiburones y mantarrayas (depredadores). Idealmente la población de peces crecería de forma exponencial en ausencia de depredadores. Sin embargo, este crecimiento es mermado por los encuentros con sus depredadores. Observemos además que el número de encuentros es proporcional al producto $x(t)y(t)$ de las dos poblaciones. Por otro lado, el crecimiento de la población de tiburones es proporcional a los encuentros con sus presas. Además, la población de tiburones tendería a desaparecer en ausencia de peces. Estas ideas dan origen al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy \end{aligned}$$

donde a, b, c y d son parámetros positivos.

Puesto que se trata de poblaciones debemos restringir nuestro análisis al primer cuadrante, $x(t) \geq 0$ y $y(t) \geq 0$. Para describir el diagrama de fase de este sistema consideramos primero la isoclina $x' = 0$ que corresponde a $ax - bxy = x(a - by) = 0$. La isoclina consiste del eje y, así como de la recta horizontal $y = a/b$. Esta isoclina divide al primer cuadrante en dos regiones, una dónde la coordenada y es pequeña y la otra donde $y > a/b$. Como la expresión $ax - bxy = x(a - by)$ es positiva para valores pequeños de y y negativa para valores grandes, se tiene que el movimiento de las soluciones es hacia la derecha cuando $y < a/b$ y hacia la izquierda cuando $y > a/b$. De manera análoga se puede ver que la isoclina $y' = 0$ está constituida por la unión del eje x y de la recta vertical $x = c/d$, y verificar que el movimiento es hacia abajo si $x < c/d$ y hacia arriba si $x > c/d$. Toda esta información nos permite elaborar el siguiente diagrama de fase



Observemos que en el eje horizontal la población de peces crece de forma constante ya que en este caso no tendrían depredadores. Asimismo, en el eje vertical la población de tiburones tiende a desaparecer por carecer de alimento. Hay dos puntos de equilibrio o estacionarios: $(0, 0)$ y $(c/d,\ a/b)$. El primero de ellos parece un punto silla. Podemos apreciar claramente que las trayectorias de las soluciones giran alrededor de $(c/d,\ a/b)$, pero no es posible distinguir si al girar las trayectorias se acercan o se alejan del punto estacionario.

Para analizar el sistema alrededor de los puntos estacionarios empleamos de nuevo el teorema de linealización. La matriz de derivadas parciales toma la forma

$$\begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}.$$

Cuando evaluamos las derivadas en el punto $(0,0)$ obtenemos una matriz diagonal con entradas a y $-c$. Esta matriz tiene determinante negativo y el sistema lineal asociado es un punto silla como habíamos conjeturado. Al evaluar en el punto $(c/d,\ a/b)$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo esta matriz tiene traza cero y determinante positivo. El sistema lineal asociado resulta degenerado y no podemos aplicar el teorema de linealización.

Existe afortunadamente otro recurso para analizar los sistemas no-lineales basado en el método de las ecuaciones separables. Supongamos que una curva solución puede expresarse como la gráfica de una función de la variable x, digamos que $y = y(x)$. Así, $y(t) = y(x(t))$. Al derivar con respecto a t so obtiene por la regla de la cadena que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Si ahora despejamos dy/dx se llega a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

Si reemplazamos finalmente dy/dt por $-cy + dxy$, y a dx/dt por $ax - bxy$, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy}$$

que afortunadamente resulta ser separable:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(dx - c)}{x}\frac{y}{a - by}.$$

Después de simplificar esta ecuación equivale a

$$(\frac{a}{y} - b)dy = \left(d - \frac{c}{x}\right) dx.$$

En la ecuación anterior debemos restringirnos necesariamente a puntos donde las dos coordenadas son estrictamente positivas. Integramos de ambos lados para obtener

$$a\ln(y) - by = dx - c\ln(x) + k,$$

que podemos reescribir como

$$c\ln(x) - dx + a\ln(y) - by = k.$$

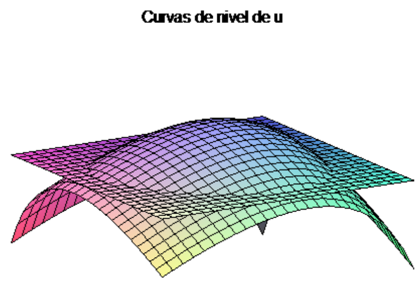
Podemos entonces deducir que las soluciones de nuestro sistema de ecuaciones coinciden con las curvas de nivel de la función $u(x,y) = c\ln(x) - dx + a\ln(y) - by$. ¿Cómo son las curvas de nivel de esta función? Observemos primero que los puntos críticos de u son precisamente los puntos estacionarios del sistema original ya que las parciales

$$u_x = \frac{c}{x} - d \;\text{ y }\; u_y = \frac{a}{y} - b$$

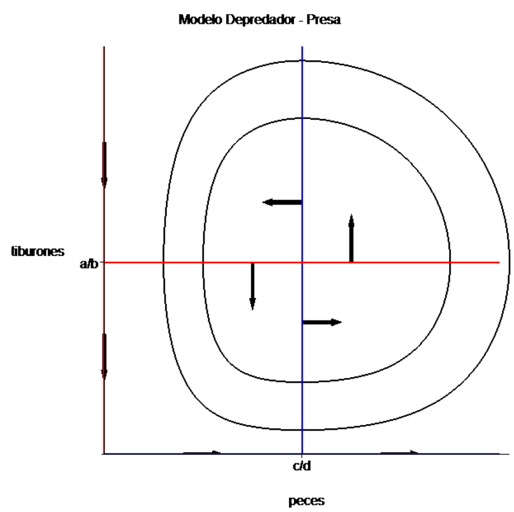
se anulan únicamente en el punto $(c/d,\ a/b)$. Además, como la matriz Hessiana es

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{y^2} \end{pmatrix}.$$

La matriz es definida negativa en todo el primer cuadrante y por tanto la función u resulta ser cóncava en todo el primer cuadrante. Aun sin conocer con detalle la gráfica de u sabemos su único punto crítico $(c/d,\ a/b)$ es el máximo absoluto en el primer cuadrante y es siempre cóncava. Sus curvas de nivel corresponden a la intersección de planos horizontales de altura k con la gráfica de u y son por lo tanto curvas cerradas. La siguiente figura nos muestra este hecho.



Ahora sí podemos describir con detalle el diagrama de fase del sistema Depredador-Presa:



Del diagrama de fase se observa que las poblaciones de peces y tiburones alternan periodos donde ambas crecen, una crece y la otra decrece, o bien, ambas decrecen. Estos ciclos están determinados por cómo varía la proporción de unos respecto a los otros. Por ejemplo, cuando hay pocos peces decrece la población de tiburones y cuando hay pocos tiburones aumenta la población de peces. De estos ciclos se tiene que la población de peces oscila alrededor de c/d, así como que la población de tiburones oscila alrededor de a/b. El punto estacionario representa las poblaciones promedio de ambas especies.

D'Ancona supuso la disminución de la actividad pesquera a raíz del conflicto bélico era la causante de las alteraciones en las proporciones de las poblaciones. ¿Cómo afecta entonces la pesca a las poblaciones? Es fácil incorporar al modelo anterior una actividad pesquera moderada modificando el sistema de ecuaciones. Con pesca moderada se tiene

$$\begin{aligned} x' &= (a-\epsilon_1)x - bxy \\ y' &= -(c+\epsilon_2)y + dxy \end{aligned}$$

donde como efecto de la pesca hemos disminuido un poco la tasa de crecimiento de los peces y aumentado la tasa de decrecimiento de los tiburones. Este modelo es en esencia idéntico al modelo sin pesca, siempre y cuando $a-\epsilon_1$ siga siendo positivo. Sin embargo, el promedio de ambas poblaciones se desplaza ahora a $((c+\epsilon_2)/d,\ (a-\epsilon_1)/b)$. Así, en promedio, como resultado de la pesca moderada aumenta el promedio de peces y disminuye el promedio de tiburones, un hecho que no es fácil de justificar sin la ayuda del modelo.

Example 38 *Modelo de estabilización inflacionaria*

En este ejemplo presentamos la dinámica del modelo de estabilización inflacionaria de Norman P. Obst [8]. En este trabajo, Obst analiza el efecto de diferentes políticas monetarias sobre el índice inflacionario.

El mecanismo de ajuste inflacionario propuesto por Obst está dado por

$$p' = h\left[1 - \frac{M_D}{M_S}\right],$$

donde p denota la tasa de inflación, h es una constante positiva y, M_D y M_S representan, respectivamente, la demanda y oferta de la moneda. Para comprender el significado de esta ecuación, observemos primero que la razón M_D/M_S representa una medida del exceso de demanda de la moneda. Así, la expresión

$$1 - \frac{M_D}{M_S}$$

resulta positiva cuando la oferta es mayor que la demanda monetaria, y negativa cuando la demanda es mayor que la oferta. Obst supone que un exceso de oferta de moneda produce entonces una elevación en la tasa inflacionaria, mientras que un exceso de demanda produce una disminución de la tasa de inflación. Resulta interesante observar que, en este modelo, el equilibrio del mercado monetario no implica estabilidad en el nivel de precios P, sino una tasa de inflación constante.

Obst supone además que la demanda de dinero es proporcional al producto nacional nominal,

$$M_D = aPQ,$$

donde a es una constante positiva y Q representa el producto nacional.

Si denotamos por μ a la razón M_D/M_S, entonces $\mu = aPQ/M_S$ por lo que su tasa de cambio de es

$$\begin{aligned}
\frac{\mu'}{\mu} &= \frac{d}{dt}\ln(\mu) \\
&= \frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} - \frac{M_S'}{M_S} \\
&= p + q - m.
\end{aligned}$$

En esta última expresión, q denota la tasa de crecimiento del producto nacional y m la tasa de expansión monetaria nominal. Estas ecuaciones son equivalentes al sistema

$$\begin{aligned}
\mu' &= \mu(p + q - m) \\
p' &= h(1 - \mu).
\end{aligned}$$

Tomaremos en este modelo la tasa q de crecimiento del producto nacional como exógena y anlizaremos el sistema (4) bajo dos políticas monetarias diferentes.

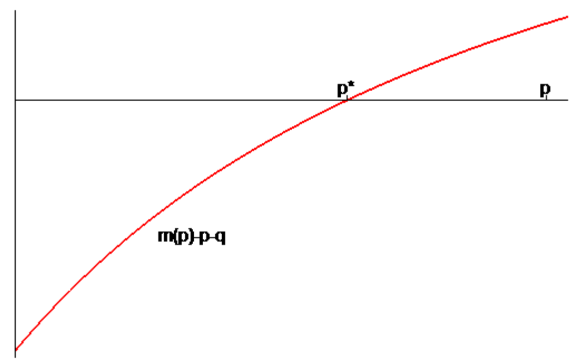
La política monetaria convencional recomienda ajustar la tasa de expansión monetaria para neutralizar la inflación:

$$m = m(p), \quad \text{con } m'(p) < 0.$$

El sistema resulta entonces

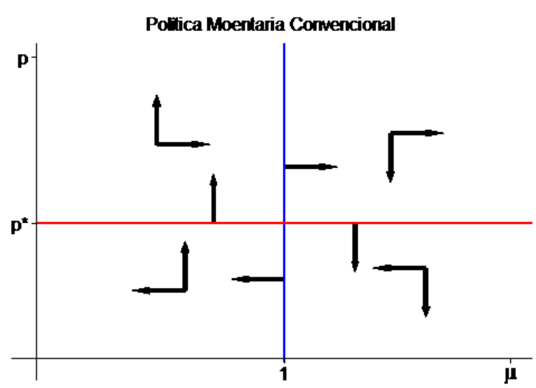
$$\begin{aligned}
\mu' &= \mu(p + q - m(p)) \\
p' &= h(1 - \mu).
\end{aligned}$$

Describamos primero a la isoclina $\mu' = 0$. Es claro que $\mu = M_D/M_S$ es positivo. Como la función $-m(p)$ es creciente, también lo es $p - m(p) + q$. Denotemos por p^* a la raíz de esta función.



La isoclina $\mu' = 0$ está dada entonces por la recta horizontal $p = p^*$. De esta figura además es claro que $\mu' = \mu(p + q - m(p))$ es positivo si $p > p^*$. El movimiento será entonces hacia la derecha arriba de la isoclina y hacia la izquierda abajo de ella.

La otra isoclina, $p' = 0$ corresponde a la recta vertical $\mu = 1$. Ahora es fácil ver que las trayectorias suben cuando $\mu < 1$ y bajan si $\mu < 1$. La siguiente figura muestra el diagrama de fase de este sistema.



Las soluciones giran alrededor del punto estacionario $(\mu, p) = (1, p^*)$. Al igual que en el caso del modelo depredador presa no se puede distinguir si al girar las soluciones se acercan o alejan de $(1, p^*)$. Para linealizar este sistema consideramos la matriz de derivadas parciales

$$\begin{pmatrix} p + q - m(p) & \mu - \mu m'(p) \\ -h & 0 \end{pmatrix}$$

y la evaluamos en $(\mu, p) = (1, p^*)$. La matriz que se obtiene es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 - m'(p^*) \\ -h & 0 \end{pmatrix}$$

degenerada ya que su traza es cero y su determinante es $h(1 - m'(p^*)) > 0$. Como no se puede aplicar el teorema de linealización trataremos de aplicar el método de las ecuaciones separables. La ecuación resultante es

$$\frac{dp}{d\mu} = \frac{h(1-\mu)}{\mu(p + q - m(p))}$$

que al separar expresamos como

$$(p + q - m(p))dp = h\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) d\mu.$$

Después de integrar vemos que las soluciones del sistema corresponden a las curvas de nivel de la función

$$u(\mu, p) = h\mu - h\ln(\mu) + \frac{p^2}{2} + qp - M(p),$$

donde M es una antiderivada de la política monetaria $m(p)$. La función u tiene como único punto crítico a $(\mu, p) = (1, p^*)$ y es convexa puesto que al ser $m'(p) < 0$ su matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{\mu^2} & 0 \\ 0 & 1 - m'(p) \end{pmatrix}$$

es siempre definida positiva. El punto $(\mu, p) = (1, p^*)$ es el mínimo de u y las soluciones resultan curvas cerradas. Esto implica que la política convencional da origen a ciclos donde la inflación oscila alrededor de p^*. Ademas, el mercado monetario alterna periodos donde la oferta monetaria es mayor que la demanda, y otros donde la demanda resulta mayor que la oferta.

Para lograr un mejor manejo de la inflación Obst propone una política monetaria basada en la tasa de cambio del índice inflacionario:

$$m = m(p'), \quad \text{con} \quad m'(p') < 0.$$

El sistema es ahora

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu(p + q - m(h(1-\mu))) \\ p' &= h(1-\mu). \end{aligned}$$

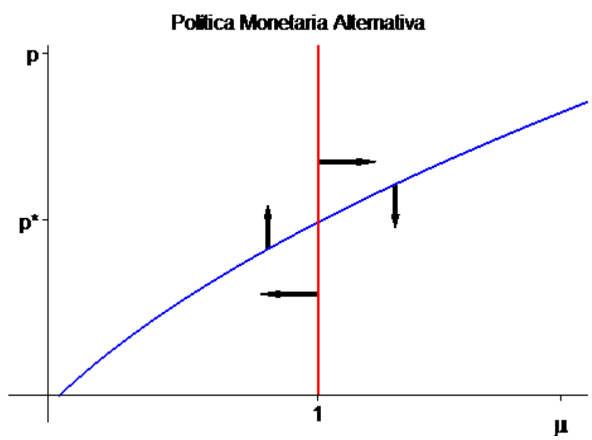
Para determinar el diagrama de fase de este sistema observemos primero que la isoclina $p' = 0$ corresponde de nuevo a la recta vertical $\mu = 1$. La isoclina $\mu' = 0$ está definida implícitamante por la ecuación

$$p + q - m(h(1-\mu) = 0.$$

Despejando p y derivando con respecto a μ se tiene

$$\frac{dp}{d\mu} = -hm'(h(1-\mu)) > 0.$$

Esto implica que la isoclina es ahora la gráfica de una función creciente.



El diagrama de fase sugiere que el equilibrio es ahora estable. De hecho, la matriz del sistema lineal asociado

$$\begin{pmatrix} hm'(0) & 1 \\ -h & 0 \end{pmatrix}$$

tiene traza negativa y determinante positivo. Aplicando el teorema de linealización se tiene que la solución estacionaria resulta estable. Para distinguir si se trata de espirales atractoras o nodos atractores observamos primero que

$$\mathrm{tr}^2 - 4\det = h^2 m'(0)^2 - 4h = h(hm'(0)^2 - 4).$$

Cuando los cambios en la política monetaria son moderados, se tiene que $hm'(0)^2 < 4$ y las soluciones son espirales atractoras. Se forman ciclos amortiguados y en el largo plazo la inflación tiende a p^* y el mercado monetario tiende al equilibrio ($\mu = 1$). El modelo indica también que si se adoptase una política monetaria agresiva con $m'(0)$ grande en valor absoluto, se tendría un nodo atractor y se tendería al punto de equilibrio sin oscilar.

4.4. Ecuaciones de orden superior y sistemas de ecuaciones

Las fórmulas de la ecuación lineal de segundo orden y las de los sistemas lineales son tan semejantes que resulta natural preguntarnos cuál la razón detrás de este hecho. Mostraremos ahora que en realidad estos conceptos son equivalentes. Para ello veamos primero cómo expresar uno de ellos en la forma del otro por medio de un "*Diccionario Ecuaciones de Segundo Orden - Sistemas* 2×2". Supongamos primero que deseamos traducir el sistema

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

a una ecuación de segundo orden. Para ello despejamos y de la primera ecuación

$$y = \frac{1}{b}x' - \frac{a}{b}x$$

y derivamos con respecto a t

$$y' = \frac{1}{b}x'' - \frac{a}{b}x'.$$

Igualamos ahora con la segunda ecuación del sistema de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}x'' - \frac{a}{b}x' &= cx + dy \\ &= cx + d\left(\frac{1}{b}x' - \frac{a}{b}x\right). \end{aligned}$$

Finalmente, al multiplicar por b obtenemos la ecuación

$$x'' - (a+d)x' + (ad - bc)x = 0.$$

Observemos que los coeficientes de x' y x son la traza y el determinante del sistema lineal, por lo que la ecuación característica de esta ecuación es idéntica a la del sistema original.

Veamos ahora cómo traducir una ecuación lineal de segundo orden

$$x'' + ax' + bx = 0$$

a un sistema. Nececitamos introducir una nueva variable, $y(t)$ la cual suponemos que satisface

$$y = x',$$

por lo que al derivar respecto a t nos da

$$y' = x''.$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación de segundo orden llegamos a

$$y' + ay + bx = 0.$$

La ecuación produce entonces el sistema

$$x' = y$$

$$y' = -bx - ay.$$

La matriz asociada a este sistema es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

y tiene como ecuación característica a

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

que es precisamente la ecuación característica de la ecuación con la que comenzamos.

Este "diccionario"nos permite resolver sistemas lineales empleando las fórmulas de las ecuaciones de segundo orden, así como resolver ecuaciones de segundo orden empleando las fórmulas de los sistemas de ecuaciones. Desde el punto de vista de la búsqueda explícita de la solución no hay simplificaciones importantes al aplicar uno u otro método. Sin embargo, desde un punto de vista geométrico el poder analizar cualitativamente un sistema de ecuaciones por medio de su diagrama de fase puede arrojar en ocasiones información importante.

Example 39

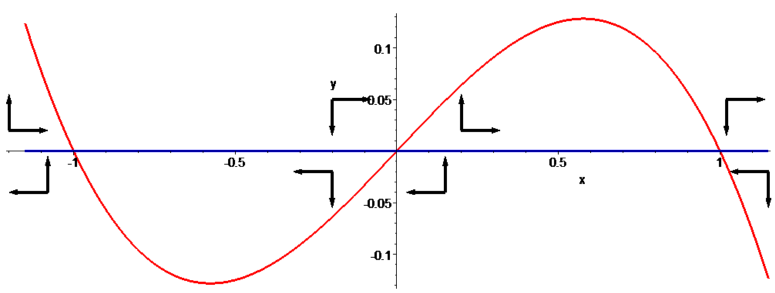
Consideremos la ecuación no-lineal $x'' + 3x' + (x^2 - 1)x = 0$. Es claro que tiene tres soluciones estacionarias, $x = 0, -1$ ó 1. A pesar de la no-linealidad es posible transformar esta ecuación en un sistema equivalente. Para ello introducimos la variable $y(t)$ con $y = x'$. Entonces,

$$\begin{aligned} y' &= x'' \\ &= -3x' - (x^2 - 1)x \\ &= -3y - (x^2 - 1)x. \end{aligned}$$

Así, el sistema asociado es

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x(1 - x^2) - 3y, \end{aligned}$$

que también resulta no-lineal. A pesar de que es difícil encontrar sus soluciones explícitas, podemos tratar de analizarlo por métodos cualitativos. La isoclina $x' = 0$ es el eje x, mientras que la isoclina $y' = 0$ corresponde a la curva $y = x(1-x^2)/3 = (x-x^3)/3$. La siguiente figura muestra su diagrama de fase.



Los puntos estacionarios del sistema corresponden a los puntos estacionarios de la ecuación original: $(0,0)$, $(-1,0)$ y $(1,0)$. El $(0,0)$ parece un punto silla y los puntos $(\pm 1, 0)$ parecen espirales. Para comprobar esto linealizamos alrededor de cada uno de ellos. La matriz de derivadas parciales es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -3 \end{pmatrix}.$$

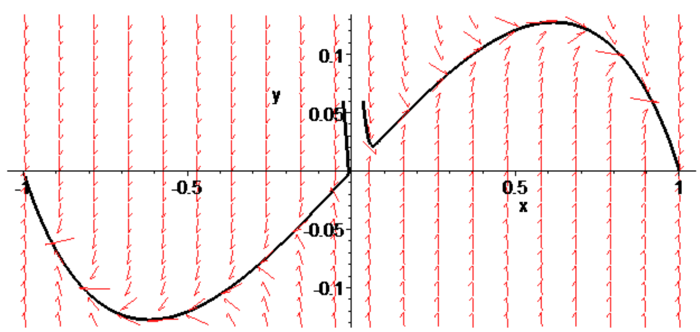
Al evaluar en $(0,0)$ da lugar a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

que tiene determinante negativo y efectivamente corresponde a un punto silla. Por otro lado, para los puntos $(\pm 1, 0)$ debemos estudiar la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

cuya traza y determinante son -3 y 2. Como además $\mathrm{tr}^2 - 4\det = 9 - 8 > 0$ se tiene que estos puntos son nodos atractores. Esta aparente contradicción con la geometría del diagrama de fase se debe a que las distancias en los ejes x y y aparecen muy distorsionadas en el diagrama de fase. De aquí podemos concluir que si partimos de una solución cercana a la solución estacionaria $(0,0)$ tenderemos a alguna de las otras dos soluciones. En la siguiente figura mostramos las trayectorias de dos soluciones con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (x(0), x'(0))$ iguales a $(0{,}35, 0{,}06)$ y a $(-0{,}25, 0{,}06)$. Una de ellas converge a $(1,0)$ y la otra a $(-1,0)$ por encontrase en diferentes lados de la variedad estable.



4.5. Ejercicios

1. Encuentra la solución de las siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

(a) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(d) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(e) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

2. Encuentra la solución general de los siguientes sistemas.

   (a) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}.$

   (b) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

3. Elabora el diagrama de fase de cada uno de los sistemas de la pregunta 1. Establece claramente las isoclinas y la dirección en que se mueven las soluciones. Traza la trayectoria de la solución asociada a la condición inicial. Traza además los subespacios de valores propios caso de que los valores sean reales.

4. Elabora el diagrama de fase de cada uno de los sistemas de la pregunta 2. Establece claramente las isoclinas y la dirección en que se mueven las soluciones. Traza además las rectas asociadas a los valores propios cuando éstos sean reales. Observa que en este caso las rectas deben pasar por el punto punto estacionario y deben tener la dirección de los vectores propios.

5. Demuestra que en el modelo de competencia duopólica el equilibrio de Cournot es siempre un nodo atractor.

6. El precio y la demanda de un bien se ajusta de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} p' &= 2(D - S) \\ S' &= \frac{1}{9}(p - 200) \\ D &= 1200 - 0{,}5p \end{aligned}$$

   (a) Reduce este modelo a un sistema de dos ecuaciones diferenciales en las variables p y S.

   (b) Encuentra la solución general de este sistema.

   (c) Determina el comportamiento a largo plazo de $p(t)$, $S(t)$ y $D(t)$ si en cierto momento $p(t_0) = p_0$ y $S(t_0) = S_0$.

7. Considera el sistema no lineal

$$\begin{aligned} x' &= x + y^2 - 16y \\ y' &= x - 2y - 24 \end{aligned}$$

   (a) Elabora el diagrama de fase señalando las isoclinas, puntos estacionarios y direcciones del movimiento.

   (b) Determina la naturaleza de los puntos estacionarios.

   (c) Determina el comportamiento en el largo plazo si $(x(0), y(0)) = (49, 12)$.

8. Considera el sistema no lineal

$$\begin{aligned} x' &= x + y^2 - 1 \\ y' &= xy + x^2 \end{aligned}$$

   (a) Elabora el diagrama de fase señalando las isoclinas, puntos estacionarios y direcciones del movimiento.

   (b) Clasifica los puntos estacionarios.

   (c) Analiza el comportamiento en el largo plazo si $x(0) = 1$ y $y(0) = 0{,}5$.

9. Considera el modelo de competencia de dos especies en un mismo hábitat dado por el sistema

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy \\ y' &= my - nxy \end{aligned}$$

(a) Elabora el diagrama de fase señalando claramente las isoclinas y la dirección en que se mueven las soluciones.

(b) Encuentra las soluciones estacionarias y emplea el teorema de linealización para clasificarlas.

(c) Demuestra que genéricamente una de las dos especies desplazará a la otra.

(d) Analiza qué sucede en el largo plazo si $x(0) = m/n$ y $y(0) > a/b$.

10. El siguiente modelo considera el mercado de un bien donde la demanda del bien está dada por $q = b - mp$ y la oferta por $q = kp$. Analiza el sistema

$$\begin{aligned} p' &= ap(b - mp - q) \\ q' &= cq(kp - q) \end{aligned}$$

donde todos los parámetros a, b, c, k y m son positivos. Observa que el factor ap en la primera ecuación incorpora el efecto de la inflación general en el precio del bien, mientras que el factor cq en la segunda ecuación proviene de la inercia del crecimiento general de la economía.

(a) Es razonable suponer que tanto p como q son estrictamente positivas. Elabora el diagrama de fase señalando claramente las isoclinas y la dirección en que se mueven las soluciones.

(b) Demuestra que sólo tiene una solución estacionaria y que además es estable.

11. Analiza el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo de Obst cuando la tasa de expansión monetaria permanece fija:

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu(p + q - m) \\ p' &= h(1 - \mu). \end{aligned}$$

Observa que bajo este supuesto tanto q como m resultan constantes. Determina qué sucede en el largo plazo si $(\mu(0), p(0)) \neq (1, m - q)$.

12. En cada uno de los siguientes sistemas elabora su diagrama de fase y demuestra que sólo tienen un único punto estacionario. Emplea el teorema de linealización o el método de las ecuaciones separables para determinar la naturaleza de éste.

(a) $$\begin{aligned} x' &= y^3 \\ y' &= x^3 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x' &= -y^3 \\ y' &= x^3 \end{aligned}$$

13. Para cada uno de los sistemas de la pregunta 2 encuentra la ecuación diferencial lineal de orden 2 asociada. Resuelve esta ecuación y compara tu solución con la solución dada por los métodos matriciales de este capítulo.

14. Considera la ecuación diferencial de segundo orden $x'' = x + x^2$.

    (a) Encuentra un sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a esta ecuación.

    (b) Elabora el diagrama de fase de este sistema. Encuentra los puntos estacionarios del sistema y clasifícalos. Si es necesario emplea el método de las ecuaciones separables para determinar la naturaleza de los puntos estacionarios.

    (c)Analiza el comportamiento a largo plazo si $x(0) = 0{,}1$ y $x'(0) = 0{,}2$.

Capítulo 5

Teoría de control

Los métodos desarrollados en los dos capítulos anteriores nos permiten analizar una gran variedad de fenómenos donde las variables evolucionan a través del tiempo. En estos modelos nuestro papel fue de observadores o analistas que desean explicar el entorno económico. Al igual que en el caso de la programación dinámica, en este capítulo volveremos a asumir el papel de agentes económicos importantes cuyas acciones a lo largo del tiempo repercuten en la evolución de otras variables. La teoría de control es una herramienta valiosa para determinar cómo ajustar nuestras acciones a través del tiempo con el fin de alcanzar un fin específico.

5.1. El Principio del Máximo de Pontrjagin

La campaña presidencial de 1992 que llevó a Bill Clinton a la Casa Blanca se debió en gran medida a la sugerencia que uno de sus asesores políticos, James Carville, resumió en la ahora famosa frase "It's the economy, stupid". Así, Clinton y sus asesores centraron gran parte del debate presidencial en la recesión que afectaba a la economía norteamericana en ese momento. El siguiente modelo de Nordhaus [7] determina qué acciones económicas debe seguir un gobierno para maximizar las posiblidades de ganar la siguiente elección y así continuar en el poder.

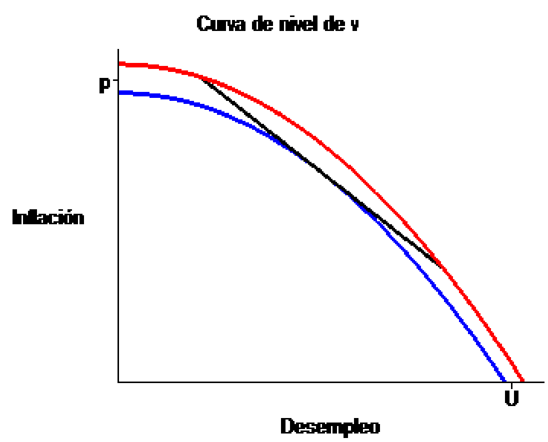
La reelección de un partido se debe en gran medida al desempeño económico que se tenga durante su periodo en el poder. Las dos variables que mayor impacto tienen en el elector común y corriente son la tasa de desempleo U y la tasa de inflación p. Aquí supondremos que el electorado toma en consideración únicamente a estas dos variables a través de una función

$$v(U, p)$$

que mide la intención de voto favorable al partido en el poder. Es natural suponer que las derivadas parciales de esta función v satisfacen

$$v_U < 0 \text{ y } v_p < 0$$

ya que el elector percibe a estas variables como males y no como bienes. Supondremos asimismo que esta función es cuasicóncava por lo que sus curvas de nivel se ven como las de la siguiente figura.



Observemos que entre más cercanos estemos al origen la función v sube de valor. De esta forma, al considerar un segmento de recta que una a dos puntos de una misma curva de nivel se tiene que la función v toma valores más altos en los puntos centrales de este segmento. Esto indica que el elector prefiere situaciones con inflación y desempleo moderados (puntos centrales) a situaciones donde una de estas variables es muy pequeña y la otra es grande (puntos extremos del intervalo).

La inflación y desempleo están sujetas a la relación de Phillips

$$p = \phi(U) + a\pi,$$

donde π denota a la inflación esperada, a es una constante con $0 < a < 1$, y como la relación entre p y U es inversa se supone que $\phi' < 0$. Se tiene además el supuesto de expectativas adaptativas sobre el comportamiento de la inflación esperada

$$\pi' = b(p - \pi)$$

con $b > 0$. Al combinar estas dos ecuaciones se tiene

$$\pi' = b(\phi(U) - (1 - a)\pi).$$

Empleando la relación de Phillips también es posible expresar la función de intención de voto en términos del desempleo y la inflación esperada:

$$v(U, p) = v(U, \phi(U) + a\pi).$$

Denotaremos por $w(U, \pi)$ a esta expresión. Supongamos que el gobierno puede controlar en cualquier momento la tasa de desempleo $U(t)$ mediante el uso de políticas fiscales y monetarias. Denotemos por $t = 0$ el momento en que el partido toma el poder y por T el momento de la nueva elección. La intención de voto a favor del partido en el poder varía lo largo del periodo $[0, T]$ ya que la inflación esperada y la tasa de desempleo cambian constantemente. Para promediar la intención de voto en el intervalo $[0, T]$ consideramos una partición

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$$

y elegimos un instante representativo $\widehat{t_i} \epsilon [t_{i-1}, t_i]$. Si la longitud del subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ es pequeña, entonces la tasa de desmpleo y la tasa de inflación esperada varían poco y $w(U(\widehat{t_i}), \pi(\widehat{t_i}))$ representa con bastante fidelidad la intención de voto en todo el subintervalo. La suma

$$\sum_{i=1}^{n} w(U(\widehat{t_i}), \pi(\widehat{t_i}))(t_i - t_{i-1})$$

es una medida de la intención de voto acumulada. Observemos que las longitudes de los subintervalos actúan como ponderadores, dando mayor peso a los subintervalos de tiempo más grandes. Esta ponderación tiene el inconveniente que no toma en consideración la escasa memoria de los electores. Para ello multiplicamos por un factor de memoria $e^{\rho t}$ que le da más peso a los subintervalos cercanos al momento de la elección y un menor peso a los subintervalos del inicio del gobierno. De esta forma, la suma

$$\sum_{i=1}^{n} w(U(\widehat{t_i}), \pi(\widehat{t_i}))e^{\rho\widehat{t_i}}(t_i - t_{i-1})$$

nos proporciona una buena medida de la intención de voto acumulada a lo largo del intervalo de gobierno. Aun el estudiante con escasa memoria reconocerá esta expresión como una suma de Riemann. Así, al tomar el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, la integral

$$\int_0^T w(U(t),\pi(t))e^{\rho t}dt$$

representa la intención de voto al momento de la elección.

El partido en el poder desea entonces encontrar la política $U(t)$ que maximice la integral anterior sujeta a

$$\pi' = b(\phi(U) - (1-a)\pi)$$

y a una condición terminal como $\pi(T) = \pi_T$ cuando la inflación esperada terminal está predeterminada, o bien, $\pi(T)$ libre cuando no importante el estado final de la inflación esperada.

Este es un ejemplo de un **problema de control**. De forma general, un problema de control consiste en determinar la política $u(t)$ que

$$\text{maximice} \quad \int_a^b f(x(t),u(t),t)dt$$

sujeto a $x' = g(x,u,t)$, con $x(a) = x_a$, y $x(b) = x_b$, o bien, $x(b)$ libre. La función $x(t)$ es la variable de estado y la función $u(t)$ es la variable de control. Observemos que la elección de cualquier política $u(t)$ determina de forma indirecta a la variable de estado mediante la ecuación diferencial $x' = g(x,u,t)$. Esta ecuación se le conoce como **ecuación de transición** o **ecuación de evolución**. Cualquier pareja de funciones $(x(t),u(t))$ que satisfaga la ecuación de transición se le llama **admisible**. El problema de control consite por tanto de encontrar la pareja admisible que maximiza la integral.

La herramienta principal para para analizar un problema de control es el **Principio del Máximo de Pontrjagin** [**9**]. A continuación aprovecharemos la semejanza con los problemas de programación dinámica en tiempo discreto para dar un esbozo de cómo surge este método.

Si tomamos una partición

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

del intervalo $[a, b]$, podemos representar el problema de control arriba descrito como el problema de determinar la política $u_0, u_1, \ldots u_n$ que

$$\text{maximice} \sum_{t=1}^{n} f(x_t, u_t, t)$$

sujeto a $x_{t+1} - x_t = g(x_t, u_t, t)$, x_0 dado y alguna de las condiciones terminales x_n dada, o bien, x_n libre. Aquí u_k y x_k representan a los valores $u(t_k)$ y $x(t_k)$ de las variable de control u y de estado x en el punto t_k de la partición. Observemos que se ha reemplazado a la derivada de x por la diferencia $x_{t+1} - x_t$. La ecuación de Bellman asociada a este problema de programación dinámica está dada por

$$V_t(x_t) = \max_{u_t}\{f(x_t, u_t, t) + V_{t+1}(x_{t+1})\}.$$

De aquí obtenemos las condiciones de primer orden

$$\begin{aligned} 0 &= f_u(x_t, u_t, t) + V'_{t+1}(x_{t+1})g_u(x_t, u_t, t) \\ V'_t(x_t) &= f_x(x_t, u_t, t) + V'_{t+1}(x_{t+1})(g_x(x_t, u_t, t) + 1). \end{aligned}$$

Si ahora denotamos a $V'_t(x_t)$ por λ_t, estas ecuaciones pueden expresarse como

$$\begin{aligned} 0 &= f_u(x_t, u_t, t) + \lambda_{t+1}g_u(x_t, u_t, t) \\ \lambda_{t+1} - \lambda_t &= -f_x(x_t, u_t, t) - \lambda_{t+1}g_x(x_t, u_t, t). \end{aligned}$$

Al tomar particiones cada vez más finas se llega a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} 0 &= f_u(x, u, t) + \lambda(t)g_u(x, u, t) \\ \lambda'(t) &= -f_x(x, u, t) - \lambda(t)g_x(x, u, t). \end{aligned}$$

Recordemos que además debe satisfacerse la ecuación de transición $x' = g(x, u, t)$.

Una forma conveniente de recordar estas tres condiciones es por medio de la **función Hamiltoniana**

$$H(x, u, \lambda, t) = f(x, u, t) + \lambda(t)g(x, u, t).$$

En términos de H la primera condición equivale encontrar u que maximice H, mientras que las otras dos condiciones dan origen al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_x \\ x' &= H_\lambda. \end{aligned}$$

El Principio del Máximo de Pontrjagin resume esta discusión:

Theorem 40 *(Pontrjagin) Supongamos que $x^*(t)$ y $u^*(t)$ son soluciones a*

$$\text{máx} \int_a^b f(x(t), u(t), t)dt$$

sujeto a $x' = g(x, u, t)$, $x(a) = x_a$ y ya sea que $x(b) = x_b$, o que sea libre. Entonces existe una función $\lambda(t)$ tal que si

$$H(x, u, \lambda, t) = f(x, u, t) + \lambda(t)g(x, u, t)$$

se tiene

i) $H(x^*(t), u(t), \lambda(t), t)$ toma su máximo en $u^*(t)$.

ii) $\lambda(t), x^*(t)$ y $u^*(t)$ son solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_x \\ x' &= H_\lambda \end{aligned}$$

con $x(a) = x_a$ y alguna de las condiciones finales $x(b) = x_b$, o bien, $\lambda(b) = 0$ en el caso $x(b)$ libre.

Este principio se puede también emplear para problemas de minimización. Para ello basta que $u^*(t)$ minimice $H(x^*(t), u(t), \lambda(t), t)$. En el sistema de ecuaciones diferenciales aparece en general la variable u. A menudo es conveniente emplear la condición de optimización de H para despejar u en términos de λ y x y reescribir el sistema de ecuaciones empleando únicamente a las variables λ y x. A continuación presentamos un par de ejemplos sencillos para mostrar cómo utilizar este principio.

Example 41

Encontrar el valor extremo de

$$\int_0^1 \left(x + u^2\right) dt$$

sujeto a $x' = -u$, $x(0) = 0$ y $x(1)$ libre.

La función Hamiltoniana es $H = x + u^2 - \lambda u$. Para encontrar dónde H alcanza sus valores extremos con respecto a u tomamos

$$H_u = 2u - \lambda = 0.$$

Observemos que $H_{uu} = 2 > 0$ indica que $u^*(t)$ minimiza a H. Observemos asimismo que eligiendo $u(t)$ convenientemente se puede ver que la integral puede alcanzar valores arbitrariamente grandes. El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} \lambda' &= -1 \\ x' &= -u. \end{aligned}$$

De la minimización de H se tiene $u = (1/2)\lambda$, de modo que el sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} \lambda' &= -1 \\ x' &= -(1/2)\lambda. \end{aligned}$$

La forma más simple de resolver este sistema es integrando la primera ecuación para obtener que $\lambda(t) = -t + A$. Reemplazando en la segunda ecuación e integrado de nuevo se tiene ahora que

$$x(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{A}{2}t + B.$$

Para determinar las constantes empleamos la restricción $x(0) = 0$, así como la condición final $\lambda(1) = 0$. De esta forma se tiene que la solución óptima se alcanza con

$$x^*(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 2t), \quad u^*(t) = \frac{1}{2}(1 - t) \ \text{ y } \ \lambda(t) = 1 - t.$$

El valor mínimo de la integral es entonces

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{4}(t^2 - 2t) + \frac{1}{4}(1 - t)^2\right) dt = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{4}\right) dt = -\frac{1}{12}.$$

Example 42

Maximizar

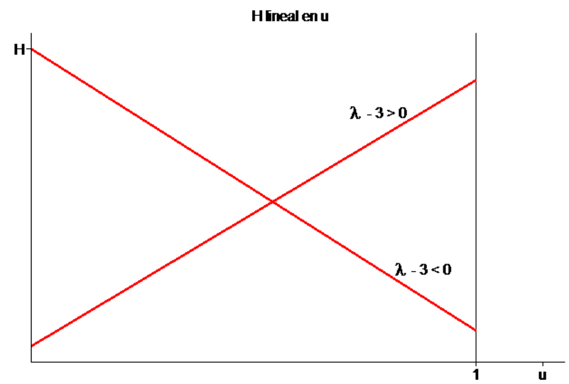
$$\int_0^1 (2x - 3u)\, dt$$

sujeto a $x' = x + u$, $x(0) = 4$, $x(1)$ libre y $u(t)\epsilon[0, 1]$.

La función Hamiltoniana es ahora

$$\begin{aligned} H &= 2x - 3u + \lambda(x+u) \\ &= (2+\lambda)x + (\lambda - 3)u. \end{aligned}$$

Como H es lineal en u, por lo que no podemos aplicar la condición de primer orden $H_u = 0$ para maximizar. De hecho, H resulta creciente como función de u cuando $\lambda - 3 > 0$ y decreciente cuando $\lambda - 3 < 0$. En la siguiente figura presentamos estos dos casos.



Es claro entonces que el valor máximo se alcanza en alguno de los extremos. Así, si $\lambda(t) > 3$ entonces $u^*(t) = 1$, mientras que si $\lambda(t) < 3$ se tendrá $u^*(t) = 0$. Conviene recalcar que cuando la función Hamiltoniana es lineal en u, sólo es posible maximizarla cuando la variable u está acotada. Así, en este problema la integral puede tomar valores arbitrariamente grandes si se elimina la restricción de que $u(t)\epsilon[0,1]$. Debemos ahora resolver el sistema

$$\begin{aligned} \lambda' &= -\lambda - 2 \\ x' &= x + u. \end{aligned}$$

La solución de la primera ecuación es $\lambda(t) = ce^{-t} - 2$. La constante c queda determinada por la condición $\lambda(1) = 0$, ya que se debe cumplir

$$ce^{-1} - 2 = 0$$

de modo que $c = 2e$ y $\lambda(t) = 2e^{1-t} - 2$. Una vez que conocemos λ estamos en condiciones de encontrar $u^*(t)$. Para ello sólo debemos determinar si $\lambda(t) > 3$ ó $\lambda(t) < 3$. Busquemos primero cuando $\lambda(t) = 3$:

$$2e^{1-t} - 2 = 3 \Leftrightarrow e^{1-t} = 5/2$$

por lo que al aplicar logaritmo natural a ambos lados tenemos $t = 1 - \ln(5/2) \approx 0{,}08$. Como además $\lambda(t) = 2e^{1-t} - 2$ es decreciente, se tiene por tanto que

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t < 0{,}08 \\ 0 & \text{si} \quad t > 0{,}08 \end{cases}$$

Para determinar la trayectoria $x(t)$ consideramos primero la ecuación $x' = x + 1$ con $x(0) = 4$ y $0 \leq t \leq 0{,}08$. Así, $x(t) = 5e^t - 1$. Para los valores de t entre 0,08 y 1 debemos considerar la ecuación $x' = x$ con condición inicial $x(0{,}08) = 5e^{0{,}08} - 1$ para garantizar que x sea continua. Se tiene por tanto que $x(t) = ce^t$ y que la constante c satisface

$$ce^{0{,}08} = 5e^{0{,}08} - 1.$$

De aquí se obtiene que $c = 4{,}077$. Resumiendo,

$$x^*(t) = \begin{cases} 5e^t - 1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 0{,}08 \\ 4{,}077e^t & \text{si} \quad 0{,}08 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Retomemos de nuevo el modelo de Nordhaus para maximizar la intención de voto en una elección. Se desea encontrar $U(t)$ que maximice

$$\int_0^T v(U, \phi(U) + a\pi)e^{\rho t} dt$$

sujeto a

$$\pi' = b(\phi(U) - (1 - a)\pi), \ \pi(0) = \pi_0 \ \text{ y } \ \pi(T) \text{ libre.}$$

Supodremos que

$$v(U, p) = -U^2 - hp \ \text{ y } \ \phi(U) = j - kU.$$

Las constantes ρ, b, h, j, k son positivas y además $0 < a < 1$. Sustituyendo estas funciones se debe maximizar

$$\int_0^T (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{\rho t} dt$$

sujeto a $\pi' = b(j - kU - (1 - a)\pi)$. De aquí formamos

$$H = (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{\rho t} + \lambda b(j - kU - (1 - a)\pi).$$

Procedemos primero a maximizar H. Para ello tomamos la parcial de H respecto a U e igualamos a cero:

$$(-2U + hk)e^{\rho t} - \lambda kb = 0.$$

Despejando U se tiene

$$U = \frac{k}{2}(h - \lambda b e^{-\rho t}). \tag{5.1}$$

Como $H_{UU} = -2e^{\rho t} < 0$ se está efectivamente maximizando. Debemos ahora resolver el sistema

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_\pi \\ \pi' &= H_\lambda. \end{aligned}$$

La primera ecuación

$$\lambda' = (1-a)b\lambda + hae^{\rho t}$$

resulta lineal de primer orden y su solución general es

$$\lambda(t) = ce^{b(1-a)t} + \frac{ha}{\rho - b(1-a)}e^{\rho t}.$$

Para simplificar la notación denotemos a la constante $\rho - b(1-a)$ por M. La función λ queda entonces descrita por

$$\lambda(t) = ce^{(\rho - M)t} + \frac{ha}{M}e^{\rho t}.$$

El valor de la constante c se obtiene de la condición terminal

$$\lambda(T) = ce^{(\rho - M)T} + \frac{ha}{M}e^{\rho T} = 0.$$

Despejando se tiene

$$c = \frac{-ha}{M}e^{MT},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{ha}{M}\left(e^{\rho t} - e^{(\rho t + M(T-t))}\right) \\ &= \frac{ha}{M}e^{\rho t}\left(1 - e^{M(T-t)}\right) \end{aligned}$$

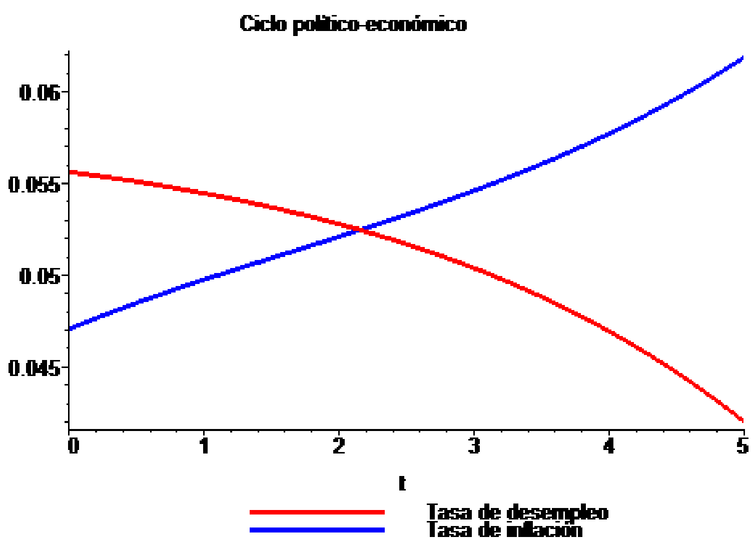
Sustituyendo esta expresión en 5.1 se llega a

$$
\begin{aligned}
U^*(t) &= \frac{k}{2}(h - \frac{ha}{M}e^{\rho t}\left(1 - e^{M(T-t)}\right)be^{-\rho t}) \\
&= \frac{kh}{2M}(M - ab\left(1 - e^{M(T-t)}\right) \\
&= \frac{kh}{2M}(M - ab + abe^{M(T-t)}) \\
&= \frac{kh}{2M}(\rho - b + abe^{M(T-t)}).
\end{aligned}
$$

Para comprender mejor el significado de esta fórmula observemos que

$$\frac{dU^*(t)}{dt} = -\frac{khab}{2}\left(e^{M(T-t)}\right) < 0$$

por lo que $U^*(t)$ es decreciente. Una vez que se tiene la expresión de la tasa de desempleo $U(t)$, se pueden emplear los supuestos que relacionan la tasa de desempleo con las tasas de inflación esperada e inflación real para obtener las fórmulas de $\pi(t)$ y $p(t)$. La siguiente figura muestra cómo evolucionan las sendas óptimas de la tasa de desempleo y de la tasa de inflación en este modelo.



5.2. Condiciones de transversalidad

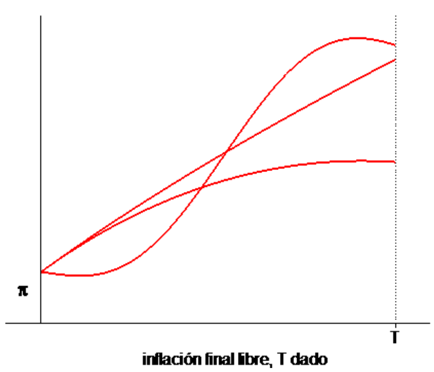
En el modelo de maximización de intención de voto que presentamos en la sección anterior supusimos que al final del periodo de gobierno $\pi(T)$ era libre, esto es, podría tomar cualquier valor. Esta condición puede interpretarse que en el más puro estilo maquiavélico el objetivo del gobierno es buscar permanecer en el poder sin tomar en consideración el estado en que se deja a la economía al final del periodo. Podríamos sin embargo pensar que un gobierno más responsable buscará igualmente permanecer en el poder, pero que establece un valor final π_T para la inflación esperada al momento de la elección. Asimismo, en regímenes parlamentarios donde el partido en el poder puede convocar a elecciones anticipadas se podría suponer que se debe igualmente alcanzar una meta π_T, pero que se desea encontrar el momento T en que debe convocar a elecciones con el fin de maximizar la posibilidad de permanecer en el poder. En todos estos casos el partido en el poder buscará maximizar

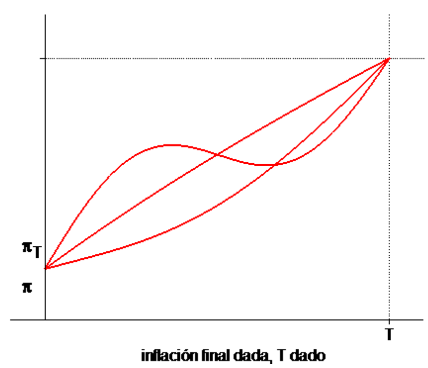
$$\int_0^T v(U, \phi(U) + a\pi)e^{\rho t}dt$$

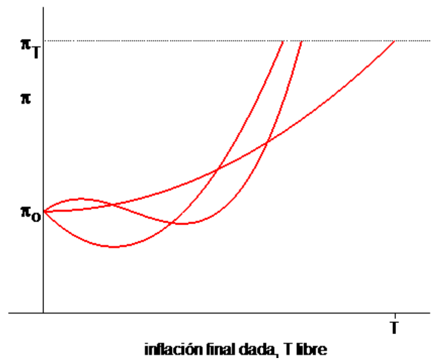
sujeto a $\pi' = b(\phi(U) - (1 - a)\pi)$, $\pi(0) = \pi_0$. Sin embargo, se podrían considerar diferentes escenarios para la condición terminal:

$\pi(T)$ libre, T dado	$\pi(T) = \pi_T$, T dado	$\pi(T) = \pi_T$, T libre

En las siguientes figuras se muestran diferentes funciones admisibles para cada uno de estos casos.







El Principio del Máximo se aplica indistintamente para resolver cualquiera de estos problemas. Así, en todos ellos se define la función Hamiltoniana $H = f + \lambda g$, se obtiene la función de control u^* que maximiza H y se analiza el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_x \\ x' &= H_\lambda. \end{aligned}$$

La solución óptima asociada a cada condición terminal se obtiene determinando las constantes de la solución del sistema mediante las llamadas **condiciones de transversalidad**. En el siguiente cuadro presentamos las condiciones de transversalidad que se usan con más frecuencia.

Condición terminal	**Condición de transversalidad**
$x(T)$ libre, T dado	$\lambda(T) = 0$
$x(T) = x_T$, T dado	$x(T) = x_T$
$x(T) = x_T$, T libre	$H(x(T), u(T), \lambda(T), T) = 0$ $x(T) = x_T$
$x(T) \geq x_T$, T dado	$\lambda(T) \geq 0$, $x(T) \geq x_T$ $\lambda(T)\,[x(T) - x_T] = 0$ Este caso sólo para maximización

A continuación presentaremos una serie de problemas dónde se muestra cómo se emplean estas condiciones y algunas de las dificultades que pueden surgir.

Example 43 *Problema del tiempo mínimo*

Se desea encontrar la política $u(t)$ que lleva a la variable x de un valor inicial x_0 a una meta final x_T en el tiempo mínimo posible si $x' = g(x, u, t)$. Para interpretar este problema como un problema de control representamos el tiempo como una integral definida:

$$\int_0^T dt = t\Big|_0^T = T - 0 = T.$$

Consideremos en particular el problema de llevar en tiempo mínimo la tasa de inflación $p(t)$ de $p(0) = 0{,}06$ a $p(T) = 0{,}02$ si $p' = 0{,}2(p - U)$ y las autoridades pueden elegir la tasa de desempleo $U(t)\epsilon[0{,}03,\ 0{,}08]$. Se debe por tanto resolver el problema

$$\text{Min} \int_0^T dt$$

sujeto a $p' = 0{,}2(p - U)$, $p(0) = 0{,}06$, $p(T) = 0{,}02$ y T libre. La función Hamiltoniana

$$H = 1 + 0{,}2\lambda(p - U) = 1 + 0{,}2\lambda p - 0{,}2\lambda U$$

es lineal en U, y como estamos minimizando es fácil ver que

$$U^*(t) = \begin{cases} 0{,}08 & \text{si } \lambda(t) > 0 \\ 0{,}03 & \text{si } \lambda(t) < 0 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones asociado es

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_p = -0{,}2\lambda \\ p' &= H_\lambda = 0{,}2(p - U) \end{aligned}$$

Al resolver la primera ecuación se llega a $\lambda(t) = Ae^{-0{,}2t}$. Para determinar el control óptimo $U^*(t)$ empleamos la condición de transversaliadad

$$\begin{aligned} H(p(T), U(T), \lambda(T), T) &= 1 + 0{,}2\lambda(T)(p(T) - U^*(T)) \\ &= 1 + 0{,}2\lambda(T)(0{,}02 - U^*(T)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observemos que independientemente de si $U^*(t)$ toma el valor 0,08 ó 0,03, la expresión $0{,}02 - U^*(T)$ es siempre negativa por lo que $\lambda(T) = Ae^{-0{,}2T}$ resulta positivo. Por tanto, $A > 0$ y en consecuencia $\lambda(t) = Ae^{-0{,}2t} > 0$ para toda t. Esto establece $U^*(t) = 0{,}08$ para todo tiempo t. La segunda ecuación toma entonces la forma

$$p' = 0{,}2p - 0{,}016$$

cuya solución general es

$$p(t) = Be^{0{,}2t} + 0{,}08.$$

Como la tasa de inflación inicial es 0,06, se debe satisfacer

$$p(0) = B + 0{,}08 = 0{,}06,$$

de donde se deduce que $B = -0{,}02$. Así,

$$p(t) = 0{,}08 - 0{,}02e^{0{,}2t},$$

y en particular,

$$p(T) = 0{,}08 - 0{,}02e^{0{,}2T} = 0{,}02.$$

Al despejar T de esta ecuación se llega a que el tiempo mínimo es $T = 5\ln(3) \approx 5{,}49$. Como más adelante nos referiremos a este ejemplo vamos a determinar el valor de la constante A. Como $\lambda(T) = Ae^{-0{,}2T}$, se tiene que $\lambda(5\ln(3)) = A/3$. Sustituyendo en la condición $H(p(T), U(t), \lambda(T), T) = 0$ se obtiene

$$1 + 0{,}2\lambda(T)(p(T) - U^*(T)) = 1 + 0{,}2A(0{,}02 - 0{,}08)/3 = 0.$$

De aquí es inmediato ver que $A = 250$. Por lo tanto, $\lambda(t) = 250e^{-0{,}2t}$.

En el siguiente ejemplo presentamos un problema donde la condición terminal es del tipo $x(T) \geq x_T$, T dado.

Example 44

Un monopolio tiene una función de costos dada por $c(x) = 0{,}5x^2 + 2$, donde $x(t)$ es la tasa o ritmo de producción por unidad de tiempo. Por ejemplo, si $x(t)$ fuese constante, digamos $x(t) = 5$ en el intervalo $[t_0, t_1]$, entonces la producción alcanzada en este periodo sería de $5(t_0 - t_1)$. De forma más general, si la tasa de prducción fuese variable, la producción del periodo $[t_0, t_1]$ sería

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)dt.$$

Supongamos que el precio del bien satisface la ecuación

$$p' = \frac{1}{16}p - \frac{3}{128}x - 1.$$

Observa que el término $(1/16)p$ representa el efecto de la inflación general en el precio del bien. ¿Cuál es la trayectoria de producción óptima si se desea incrementar el precio del bien p de 42 en el tiempo 0 a cuando menos 44 en 2 periodos de tiempo? Se debe por tanto encontrar la política de producción $x(t)$ en el periodo de producción [0, 2] que maximice

$$\int_0^2 (px - 0{,}5x^2 - 2)dt$$

sujeto a

$$p' = \frac{1}{16}p - \frac{3}{128}x - 2, \quad p(0) = 42 \;\text{ y }\; p(2) \geq 44.$$

La función Hamiltoniana es

$$H = px - 0{,}5x^2 - 2 + \lambda(\frac{1}{16}p - \frac{3}{128}x - 1).$$

Recordemos que la variable de estado es la que está determinada por la ecuación diferencial y en este caso corresponde a p. Debemos entonces proceder a maximizar H con respecto a la variable de control x. La condición de primer orden

$$H_x = p - x - \frac{3}{128}\lambda = 0$$

nos permite expresar x en términos de λ y p:

$$x = p - \frac{3}{128}\lambda.$$

Al sustituir esta expresón en el sistema

$$\begin{aligned}
\lambda' &= -H_p = -x - \frac{1}{16}\lambda \\
p' &= H_\lambda = \frac{1}{16}p - \frac{3}{128}x - 1
\end{aligned}$$

se llega a

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/128 & -1 \\ 9/16384 & 5/128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Su solución general es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ p \end{pmatrix} = me^{\frac{1}{32}t} \begin{pmatrix} -128 \\ 9 \end{pmatrix} + ne^{-\frac{1}{32}t} \begin{pmatrix} -128 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1024 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

La condición de transversalidad es ahora

$$\lambda(2) \geq 0, \quad x(2) \geq 44 \ \text{ y } \ \lambda(2)(x(2) - 44) = 0.$$

Los valores de las constantes m y n se obtienen empleando alguna de las siguientes condiciones: $p(0) = 42$ y $\lambda(2) = 0$, o bien, $p(0) = 42$ y $p(2) = 44$. En el primer caso es necesario además verificar que se cumpla $p(2) \geq 44$, mientras que en el segundo se requiere $\lambda(2) \geq 0$. Si consideramos el primer caso debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} -128e^{1/16}m - 128e^{-1/16}n - 1024 &= 0 \\ 9m + n + 40 &= 42. \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones se llega a

$$m = \frac{8 + 2e^{-1/16}}{9e^{-1/16} - e^{1/16}} \ \text{ y } \ n = \frac{-72 - 2e^{-1/16}}{9e^{-1/16} - e^{1/16}}.$$

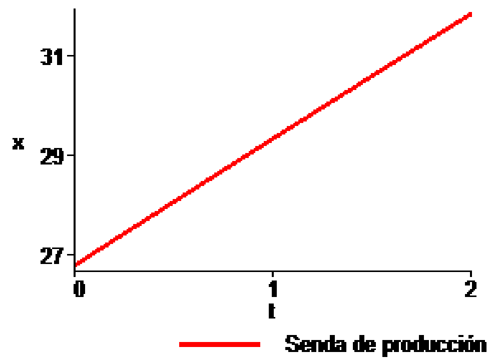
Debemos ahora verificar que se cumpla $p(2) \geq 44$, pero con estos valores se tiene que $p(2) = 43{,}38$. Tenemos que considerar entonces la segunda opción, esto es, incrementar la producción de 42 a 44 y verificar $\lambda(2) \geq 0$. El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} 9m + n + 40 &= 42 \\ 9e^{1/16}m + e^{-1/16}n + 40 &= 44. \end{aligned}$$

Ahora

$$m = \frac{2e^{-1/16} - 4}{9(e^{-1/16} - e^{1/16})} \ \text{ y } \ n = \frac{4 - 2e^{1/16}}{e^{-1/16} - e^{1/16}}.$$

Con estos valores se tiene $\lambda(2) = 517{,}92 > 0$. La solución óptima está por tanto dada por estos valores de m y n. La siguiente figura muestra cómo se incrementa la producción con estos valores.



Example 45 *Maximización de beneficios*

Una empresa desea establecer su plan de inversión con el fin de maximizar sus beneficios. Si la tasa de depreciación del capital es de $1/2$ y denotamos por $K(t)$ al stock de capital y por $I(t)$ a la inversión bruta, entonces la inversión neta puede expresarse como

$$K' = I - \frac{1}{2}K.$$

La empresa desea maximizar el total de sus beneficios

$$\int_0^T K - K^2 - \frac{I^2}{2} dt$$

en el periodo $[0, T]$ contando con un capital inicial $K(0) = 13/9$. Deseamos analizar las diferencias en las trayectorias óptimas de $I(t)$ y de $K(t)$ bajo tres condiciones terminales diferentes:

a) $T = 4$, $K(4)$ libre.

b) $T = 4$, $K(4) = 6/9$.

c) T libre, $K(T) = 6/9$.

El planteamiento del problema es idéntico para cualquiera de los tres casos. Se define la función Hamiltoniana

$$H = K - K^2 - \frac{I^2}{2} + \lambda\left(I - \frac{1}{2}K\right)$$

y se maximiza con respecto a la variable de control:

$$H_I = -I + \lambda = 0.$$

Se trata efectivamente de un máximo ya que $H_{II} = -1 < 0$. De aquí se obtiene que $I = \lambda$. El sistema

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_K = -\left(1 - 2K - (1/2)\lambda\right) \\ K' &= H_\lambda = I - (1/2)K \end{aligned}$$

que después de sustituir I por λ se reduce a

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ K' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Su solución general es

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ K \end{pmatrix} = me^{\frac{3}{2}t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + ne^{-\frac{3}{2}t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix},$$

de modo que al tomar en consideración la condición inicial común $K(0) = 13/9$ se tiene

$$m + n + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}.$$

Luego, $n = 1 - m$. Reemplazando esto en la solución produce

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= m\left[2e^{\frac{3}{2}t} + e^{-\frac{3}{2}t}\right] - e^{-\frac{3}{2}t} + 2/9 \\ K(t) &= m\left[e^{\frac{3}{2}t} - e^{-\frac{3}{2}t}\right] + e^{-\frac{3}{2}t} + 4/9. \end{aligned}$$

Para determinar el valor de m se requiere de aplicar la condición de transversalidad asociada a cada caso.

a) $T = 4$, $K(4)$ libre.

La condición de transversalidad correspondiente es $\lambda(4) = 0$, por lo que

$$\lambda(4) = m\left[2e^{6} + e^{-6}\right] - e^{-6} + 2/9 = 0.$$

De aquí se deduce que

$$m = \frac{e^{-6} - 2/9}{2e^{6} + e^{-6}}.$$

Con este valor se tienen expresiones explícitas para $K(t), \lambda(t)$ e $I(t)$. Con estas expresiones es posible obtener los beneficios óptimos

$$\int_0^4 K - K^2 - \frac{I^2}{2} dt = 0{,}622,$$

así como el stock de capital final $K(4) = 0{,}337$.

b) $T = 4$, $K(4) = 6/9$.

Para determinar m debemos considerar

$$K(4) = m\left[e^{6} - e^{-6}\right] + e^{-6} + 4/9 = 6/9.$$

Ahora

$$m = \frac{2/9 - e^{-6}}{e^{6} - e^{-6}}$$

por lo que los beneficios óptimos son

$$\int_0^4 K - K^2 - \frac{I^2}{2} dt = 0{,}514,$$

que como es de esperarse resultan ser menores que en el caso $K(4)$ libre.

c) T libre, $K(T) = 6/9$.

La condición a considerar en este caso es $H(K(T), I(T), \lambda(T), T) = 0$. Procedemos entonces a reemplazar las expresiones

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= I(t) = m\left[2e^{\frac{3}{2}t} + e^{-\frac{3}{2}t}\right] - e^{-\frac{3}{2}t} + 2/9 \\ K(t) &= m\left[e^{\frac{3}{2}t} - e^{-\frac{3}{2}t}\right] + e^{-\frac{3}{2}t} + 4/9. \end{aligned}$$

en $H = K - K^2 - \frac{I^2}{2} + \lambda\left(I - \frac{1}{2}K\right)$. Resulta verdaderamente sorprendente que al simplificar esta expresión se obtenga simplemente

$$H(t) = \frac{9}{2}\left(m^2 - m + \frac{4}{81}\right).$$

Observemos que se cancelaron todos los términos en que aparece t y, de hecho, H es constante. Al igualar $H = 0$ se tienen dos valores posibles para m:

$$m_1 = \frac{9 + \sqrt{65}}{18} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{9 - \sqrt{65}}{18}.$$

En el primer caso $K(t)$ es creciente y como $K(0) = 13/9$, entonces no existe un valor $T > 0$ con $K(T) = 6/9$. Para el segundo valor de m se puede ver que K decrece un poco en el intervalo $[0, 0{,}97]$ para después volverse creciente. Sin embargo, el valor mínimo alcanzado es aproximadamente 0,89 por lo que con este valor de m tampoco tiene solución $K(T) = 6/9$. Esto parece sugerir que el problema con $K(T) = 6/9$ y T libre no tiene solución. Para entender qué esta sucediendo evaluamos los beneficios óptimos asociados a las condiciones terminales $K(T) = 6/9$ con diferentes valores de T dados. La siguiente tabla muestra algunos de los resultados obtenidos.

T	2	4	8	32	128	1024
$\int_0^T K - K^2 - \frac{I^2}{2} dt$	0.098	0.514	1.4	6.73	28.1	227.2

Observemos que el valor óptimo correspondiente a $T = 4$ es el que obtuvimos en el caso *b)*. Es claro de la tabla que la integral alcanza valores más grandes cuando ampliamos el horizonte $[0, T]$ por lo que no existe un valor de T que maximice esta integral con $K(T) = 6/9$. Cabe señalar que para el manejo algebraico y numérico de este ejemplo nos ayudamos de una computadora.

En el ejemplo anterior señalamos que resulta asombroso el hecho de que el Hamiltoniano evaluado en las soluciones óptimas se mantenga constante

$$H(K^*(t), I^*(t), \lambda^*(t), t) = \frac{9}{2}\left(m^2 - m + \frac{4}{81}\right).$$

¿Es esto mera coincidencia o es posible explicarlo? Consideremos en general el problema de maximizar

$$\int_0^T f(x, u, t)dt$$

sujeto a $x' = g(x, u, t)$. Supongamos que $x^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ son soluciones óptimas y tomemos la derivada (total) de $H^* = H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)$ con respecto a t:

$$\begin{aligned} \frac{dH^*}{dt} &= \frac{\partial H^*}{\partial x}x^{*\prime} + \frac{\partial H^*}{\partial u}u^{*\prime} + \frac{\partial H^*}{\partial \lambda}\lambda^{*\prime} + \frac{\partial H^*}{\partial t} \\ &= -\lambda^{*\prime}x^{*\prime} + 0 + x^{*\prime}\lambda^{*\prime} + \frac{\partial H^*}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H^*}{\partial t}. \end{aligned}$$

Si en particular el problema es **autónomo**, es decir, tanto f como g no dependen explícitamente de t, entonces el Hamiltoniano

$$H = f(x, u) + \lambda g(x, u)$$

tampoco depende explicitamente de t, y por tanto,

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t} = 0.$$

Este hecho es relevante cuando el problema tiene al tiempo final T libre ya que si la solución óptima satisface $H(x^*(T), u^*(T), \lambda^*(T), T) = 0$, entonces $H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = 0$ para cualquier valor de t. Esto demuestra el siguiente resultado.

Proposition 46 *Si el problema de control es autónomo y $H^*(t) = H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)$ representa a la función Hamiltoniana evaluada en la solución óptima $(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)$, entonces $H^*(t)$ es constante. Si además la solución óptima proviene de una condición terminal con tiempo final libre, entonces*

$$H^*(t) = 0$$

para toda t.

En el ejemplo del problema de tiempo mínimo para llevar la tasa de inflación de 0.06 a 0.02 se tenía

$$H = 1 + 0{,}2\lambda(p - U).$$

Las soluciones óptimas que obtuvimos son $p^*(t) = 0{,}08 - 0{,}02e^{0{,}2t}, U^*(t) = 0{,}08$ y $\lambda(t) = 25e^{-0{,}2t}$. Al sustituir estas expresiones en la fórmula de la función Hamiltoniana se tiene

$$\begin{aligned} H &= 1 + 50e^{-0{,}2t}\left(0{,}08 - 0{,}02e^{0{,}2t} - 0{,}08\right) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

como era de esperarse de la proposición anterior.

5.3. Cálculo de variaciones

La programación dinámica y la teoría de control se desarrollaron hace poco más de cincuenta años. La programación dinámica se originó en los Estados Unidos por las ideas de Bellman, mientras que de manera simultánea, la teoría de control surgió en la Unión Soviética bajo la guía de Pontrjagin. Sin embargo, desde el surgimiento del cálculo a fines del siglo XVII ya se habían logrado avances sobre la búsqueda de funciones que son solución de problemas de maximización o minimización. Uno de los problemas más famosos de la época fue el de la **braquistócrona** o curva de descenso más rápido. La cuestión fue propuesta por Johann Bernoulli en 1696 y consistía en determinar la curva que debe seguir una partícula que se mueve en un plano vertical de un punto A a otro punto B más bajo sólo bajo la fuerza de la gravedad. Este problema atrajo la atención de varios de los grandes matemáticos del momento y fue resuelto por cinco de ellos: Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli, L'Hopital y el propio Johann Bernoulli. Medio siglo después, a mediados del siglo XVIII el genio de Euler generalizó las ideas de los hermanos Bernoulli y desarrolló el **cálculo de variaciones** que es un caso particular de la teoría de control.

La formulación general de un problema de cálculo de variaciones consiste en determinar la función $x(t)$ que maximiza

$$\int_0^T f(x(t), x'(t), t)dt$$

sujeta a $x(0) = x_0$ y a una condición terminal como $x(T) = x_T$, o bien, $x(T)$ libre.

Euler encontró que la solución x debe satisfacer una ecuación diferencial de segundo orden. A continuación veremos cómo obtener esta ecuación transformando el problema de cálculo de variaciones en uno de teoría de control. Para ello simplemente se toma $x' = u = g(x, u, t)$. La función Hamiltoniana asociada es

$$H = f(x, u, t) + \lambda u.$$

Por el principio del máximo la solución debe satisfacer

$$H_u = f_u + \lambda = 0$$

y

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_x = -f_x \\ x' &= H_\lambda = u. \end{aligned}$$

La condición de transversalidad es $x(T) = x_T$, o bien, $\lambda(T) = 0$ en el caso que $x(T)$ sea libre.

De la condición de maximización de H se tiene que $\lambda = -f_u$. Derivando con respecto a t se tiene

$$\lambda' = -\frac{d}{dt} f_u$$

de modo que al igualar con la primera ecuación del sistema y reemplazar u por x' se tiene que

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo orden y se le conoce como **ecuación de Euler**. La solución x debe satisfacer esta ecuación diferencial. Las constantes asociadas a esta ecuación se pueden determinar empleando la condición inicial $x(0) = x_0$ y alguna de las siguientes condiciones de transversalidad:

Condición terminal	**Condición de transversalidad**
$x(T)$ libre, T dado	$f_{x'}\mid_{t=T} = 0$
$x(T) = x_T$, T dado	$x(T) = x_T$
$x(T) = x_T$, T libre	$(f - x' f_{x'})\mid_{t=T} = 0$ $x(T) = x_T$

El cálculo de variaciones conserva mucha importancia por su sencillez y por la gran diversidad de modelos a los que se aplica. El siguiente ejemplo lo analizaremos bajo los dos puntos de vista.

Example 47

Se desea encontrar $x(t)$ que minimice

$$\int_0^1 x^2 + (x')^2\, dt$$

sujeto a $x(0) = 0$ y $x(1) = e^2 - 1$.

Como un problema de cálculo de variaciones se tiene $f(x, x', t) = x^2 + (x')^2$. En este caso se tiene que

$$f_x = 2x \;\text{ y }\; f_{x'} = 2x',$$

por lo que la ecuación de Euler asociada es

$$\begin{aligned} f_x - \frac{d}{dt}f_{x'} &= 2x - \frac{d}{dt}2x' \\ &= 2x - 2x'' \\ &= 0. \end{aligned}$$

tenemos entonces una ecuación lineal de segundo orden homogénea, $x'' - x = 0$. Su solución general es

$$x(t) = me^t + ne^{-t}.$$

Para obtener el valor de las constantes consideramos el sistema

$$\begin{aligned} x(0) &= m + n = 0 \\ x(1) &= me + ne^{-1} = e^2 - 1 \end{aligned}$$

del cual se deduce que

$$m = e \;\text{ y }\; n = -e.$$

La solución es por lo tanto

$$x(t) = e^{t+1} - e^{1-t}.$$

Abordemos el mismo problema ahora con los métodos de la teoría de control. Se desea minimizar

$$\int_0^1 x^2 + u^2 dt$$

sujeto a $x' = u$, $x(0) = 0$ y $x(1) = e^2 - 1$. En este caso $H = x^2 + u^2 + \lambda u$. De la condición de maximización se obtiene

$$H_u = 2u + \lambda = 0$$

que permite expresar $u = -(1/2)\lambda$. Se tiene además el sistema

$$\begin{aligned} \lambda' &= -2x \\ x' &= u = -(1/2)\lambda \end{aligned}$$

que en lenguaje matricial es

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ x \end{pmatrix}.$$

De aquí es fácil ver que

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ x \end{pmatrix} = me^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + ne^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y en particular,

$$x(t) = e^{t+1} - e^{1-t}.$$

El valor de las constantes se establece igual que en el caso del cálculo de variaciones.

Example 48 *Modelo de Ramsey continuo*

Para su formulación original en 1928 Ramsey [10] consideró una función de producción $y = f(k)$ con único factor de producción, el stock de capital k. Se tiene además rendimientos decrecientes a escala, así que $f' > 0$ y $f'' < 0$. Supuso además que el producto se distribuye entre consumo, inversión neta y reposición de capital depreciado, es decir,

$$f(k) = c + k' + \delta k.$$

Para planear la inversión de forma óptima las autoridades eligen una función de utilidad social $u(c)$ con $u' > 0$ y $u'' < 0$. Al despejar c de la ecuación anterior se tiene que $c = f(k) - k' - \delta k$ y el problema que las autoridades deben considerar es elegir la senda óptima de capital $k(t)$ que maximice la utilidad total descontada

$$\int_0^T u(f(k) - k' - \delta k)e^{-\rho t}dt$$

sujeto a $k(0) = k_0$ y $k(T) = k_T$.

Conviene conservar la notación $c = f(k) - k' - \delta k$ para obtener la ecuación de Euler. En este caso,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial k}\left(u(c)e^{-\rho t}\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial k'}\left(u(c)e^{-\rho t}\right) \\
&= u'(c)\left(f'(k) - \delta\right)e^{-\rho t} - \frac{d}{dt}u'(c)\left(-1\right)e^{-\rho t} \\
&= u'(c)\left(f'(k) - \delta\right)e^{-\rho t} + u''(c)c'e^{-\rho t} - \rho u'(c)e^{-\rho t}
\end{aligned}$$

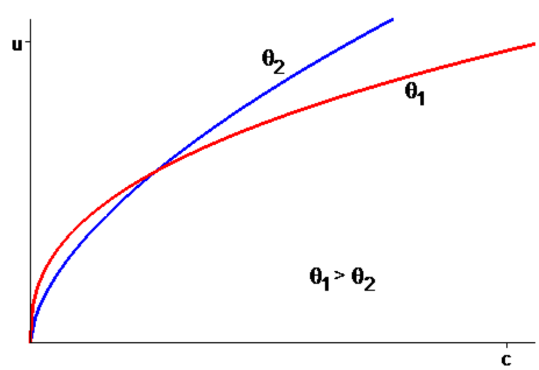
Multiplicando la ecución por $e^{\rho t}$ y asociando los términos con $u'(c)$ se llega a

$$u'(c)\left(f'(k) - \delta - \rho\right) + u''(c)c' = 0.$$

Si además suponemos que la función de utilidad es de la forma

$$u(c) = \frac{1}{1-\theta}c^{1-\theta},$$

con $0 < \theta < 1$. En la siguiente figura mostramos un par de funciones de esta familia donde resulta claro que el parámetro θ representa la aversión al riesgo.



Esta función de utilidad satisface

$$u'(c) = c^{-\theta} \quad \text{y} \quad u''(c) = -\theta c^{-\theta-1}$$

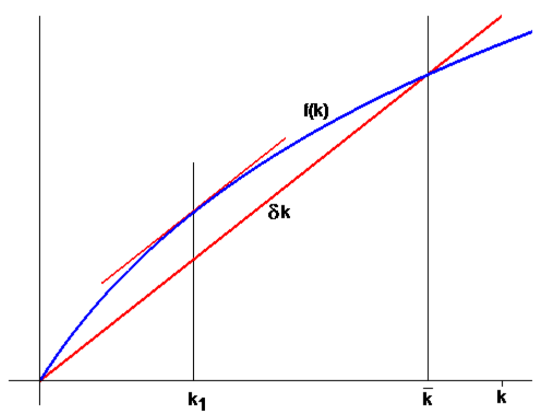
de modo que al sustituir en la ecuación de arriba y simplificar se obtiene

$$c\left(f'(k) - \delta - \rho\right) - \theta c' = 0.$$

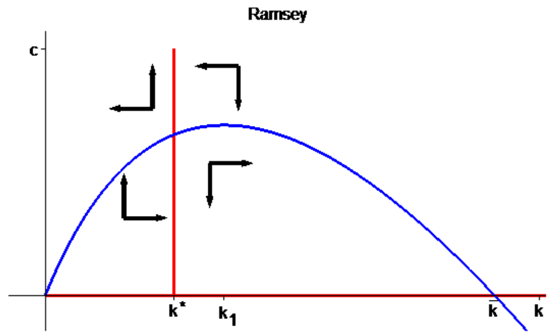
Como además $c = f(k) - k' - \delta k$, se tiene el sistema

$$\begin{aligned} k' &= f(k) - \delta k - c \\ c' &= \frac{c}{\theta}\left(f'(k) - \delta - \rho\right) \end{aligned}$$

Analicemos ahora este sistema empleando su diagrama de fase. Debemos determinar primero la isoclina $k' = 0$. Esta corresponde a la curva $c = f(k) - \delta k$. Si suponemos además que el producto marginal del capital para $k = 0$ es razonablemente grande, esto es, $f'(0) > \delta + \rho$, al comparar la gráfica f con la recta δk se tiene la siguiente figura, donde los valores k_1 y $\overline{k}$ están determinados por $f'(k_1) = \delta$ y $f(\overline{k}) = \delta \overline{k}$.



Observemos que f' es decreciente ya que $f'' < 0$. Así, existe $k^* < k_1$ con $f'(k^*) = \delta + \rho$. Denotemos por c^* a $f(k^*) - \delta k^*$. De aquí resulta fácil describir el diagrama de fase del sistema.



El sistema posee tres soluciones estacionarias: $(0,0)$, $(\overline{k},0)$ y (k^*,c^*). Para analizar el comportamiento de alrededor de estas soluciones consideramos la matriz de derivadas parciales

$$\begin{pmatrix} f'(k)-\delta & -1 \\ cf''(k)/\theta & (f'(k)-\delta-\rho)/\theta \end{pmatrix}$$

y evaluamos en los puntos estacionarios. Para $(0,0)$ se tiene la matriz triangular

$$\begin{pmatrix} f'(0)-\delta & -1 \\ 0 & (f'(0)-\delta-\rho)/\theta \end{pmatrix}$$

con ambos valores propios $\lambda_1 = f'(0)-\delta$ y $\lambda_2 = (f'(0)-\delta-\rho)/\theta$ positivos. Se trata de un nodo repulsor. El caso de $(\overline{k},0)$ es similar ya que la matriz vuelve a ser triangular

$$\begin{pmatrix} f'(\overline{k})-\delta & -1 \\ 0 & (f'(\overline{k})-\delta-\rho)/\theta \end{pmatrix},$$

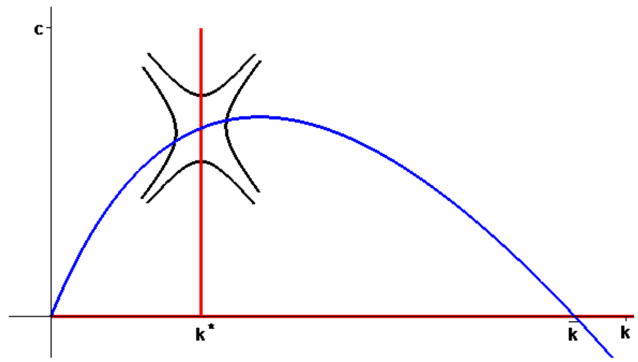
pero ahora los valores propios resultan ser negativos. Corresponde por tanto a un nodo atractor. Finalmente, para el caso de (k^*,c^*) la matriz obtenida

$$\begin{pmatrix} f'(k^*)-\delta & -1 \\ c^*f''(k^*)/\theta & 0 \end{pmatrix}$$

tiene como determinante a

$$\frac{c^*f''(k^*)}{\theta} < 0$$

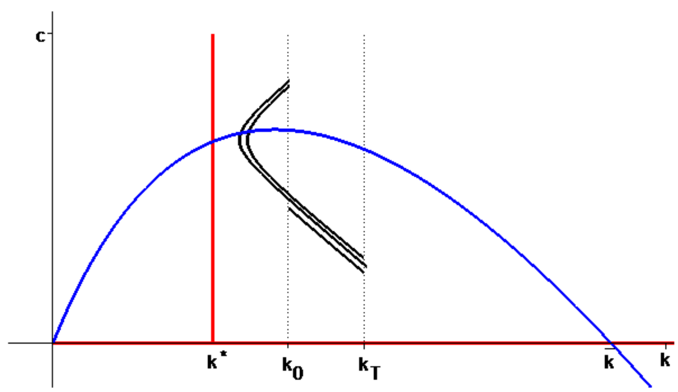
y es como era de esperarse un punto silla.



Para comprender el significado de algunas de las soluciones supongamos que se tiene

$$k^* < k_0 < k_T.$$

El stock de capital debe empezar en k_0 y crecer hasta que en el tiempo T tome el valor k_T. En la siguiente figura mostramos cómo son las trayectorias posibles.



Es claro que existen muchas soluciones que empiezan en k_0 y terminan en k_T. Algunas de ellas corresponden a la parte baja de las curvas solución de la figura y en ellas k resulta creciente mientras que c decrece constantemente. Sin embargo, también se tiene la posibilidad de que la solución esté representada por una de las curvas superiores. En este caso c decrece constantemente, pero el capital primero decrece y despúes vuelve a crecer hasta llegar a k_T. De todas las combinaciones posibles, sólo hay una curva solución que empieza en k_0 y termina en k_T y a la que le toma exactamente

T unidades de tiempo en hacer este recorrido. Esta curva es la solución al problema de utilidad social óptima.

El modelo de Ramsey puede también ser abordado empleando la teoría de control. El problema de control a estudiar consiste en encontrar las sendas óptimas de consumo y capital que maximicen

$$\int_0^T u(c)e^{-\rho t}dt$$

sujeta a $k' = f(k) - \delta k - c$, $k(0) = k_0$ y $k(T) = k_T$. Se define entonces $H = u(c)e^{-\rho t} + \lambda(f(k) - \delta k - c)$ y se procede a maximizar H con respecto al consumo c, que es ahora la variable de control. Así,

$$H_c = u'(c)e^{-\rho t} - \lambda = 0.$$

Además se debe satisfacer el sistema

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_k = -\lambda(f'(k) - \delta) \\ k' &= H_\lambda = f(k) - \delta k - c. \end{aligned}$$

Si despejamos λ de la condición de maximización de H y derivamos respecto a t se tiene

$$\lambda' = u''(c)c'e^{-\rho t} - \rho u'(c)e^{-\rho t}.$$

Igualando las dos expresiones que tenemos para λ' se tiene

$$\begin{aligned} u''(c)c'e^{-\rho t} - \rho u'(c)e^{-\rho t} &= -\lambda(f'(k) - \delta) \\ &= -u'(c)e^{-\rho t}(f'(k) - \delta). \end{aligned}$$

Simplificando se llega a

$$u'(c)\left(f'(k) - \delta - \rho\right) + u''(c)c' = 0$$

que es precisamente la ecuación de Euler que habíamos obtenido empleando cálculo de variaciones.

5.4. Hamiltoniano en valor corriente

Consideremos el problema de maximizar

$$\int_0^1 (-x^2 - 0{,}5u^2)e^{-2t}dt$$

sujeto a $x' = x+u$, $x(0) = 1$ y $x(1)$ libre. El Hamiltoniano correspondiente viene dado por $H = (-x^2 - 0{,}5u^2)e^{-2t} + \lambda(x+u)$. Al maximizar H respecto a la variable de control u se tiene

$$H_u = -ue^{-2t} + \lambda = 0$$

que nos permite expresar u como $u = \lambda e^{2t}$. El sistema de ecuaciones diferenciales viene dado por

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_x = -\lambda + 2xe^{-2t} \\ x' &= H_\lambda = x + u, \end{aligned}$$

pero al reemplazar u por λe^{2t} se llega al sistema

$$\begin{aligned} \lambda' &= -\lambda + 2xe^{-2t} \\ x' &= \lambda e^{2t} + x. \end{aligned}$$

Si bien este sistema de ecuaciones diferenciales es lineal, presenta la dificultad de que algunos de sus coeficientes no son constantes. Aun cuando existen técnicas para resolverlos, hay una forma sencilla de analizar problemas de control del tipo

$$\text{máx} \int_0^T f(x,u)e^{-\rho t} dt$$

sujeto a $x' = g(x,u)$, $x(0) = x_0$ y alguna condición terminal. Estos problemas son autónomos salvo por el factor de descuento $e^{-\rho t}$ en el integrando y aparecen con mucha frecuencia en economía. Para estos problemas la función Hamiltoniana toma la forma

$$H = f(x,u)e^{-\rho t} + \lambda g(x,u)$$

y las condiciones del principio del máximo son

$$f_u e^{-\rho t} + \lambda g_u = 0$$

y

$$\begin{aligned} \lambda' &= -f_x e^{-\rho t} - \lambda g_x \\ x' &= g. \end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga al caso de programación dinámica definimos $\overline{\lambda} = \lambda e^{\rho t}$ y al Hamiltoniano en valor corriente $\overline{H}$ como

$$\begin{aligned}\overline{H} &= He^{\rho t}\\ &= f(x,u) + \lambda g(x,u)e^{\rho t}\\ &= f(x,u) + \overline{\lambda} g(x,u).\end{aligned}$$

Observemos que el Hamiltoniano en valor corriente $\overline{H}$ es autónomo ya que sólo depende de las variables de estado x y de control u. Es fácil verificar que las condiciones del principio del máximo resultan equivalentes en este caso a

$$\overline{H}_u = 0$$

y

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}' &= -\overline{H}_x + \overline{\lambda}\rho\\ x' &= \overline{H}_{\overline{\lambda}} = g.\end{aligned}$$

Volvamos al problema

$$\text{máx} \int_0^1 (-x^2 - 0{,}5u^2)e^{-2t}dt$$

sujeto a $x' = x + u$, $x(0) = 1$ y $x(1)$ libre. El Hamiltoniano en valor corriente es $\overline{H} = -x^2 - 0{,}5u^2 + \overline{\lambda}(x+u)$. Al igual que con el Hamiltoniano estándar debemos primero maximizar $\overline{H}$ respecto a u. Al derivar respecto a u tenemos

$$\overline{H}_u = -u + \overline{\lambda} = 0$$

de forma que $u = \overline{\lambda}$. Las soluciones deben satisfacer

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}' &= -\overline{H}_x + 2\overline{\lambda} = -(-2x + \overline{\lambda}) + 2\overline{\lambda}\\ x' &= \overline{H}_\lambda = x + u,\end{aligned}$$

que simplificando produce el sistema lineal

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}' &= \overline{\lambda} + 2x\\ x' &= \overline{\lambda} + x.\end{aligned}$$

Su solución general es

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda} \\ x \end{pmatrix} = me^{(1+\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + ne^{(1-\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Para determinar las constantes debemos emplear la condición inicial $x(0) = 1$ y una condición de transversalidad. La condición asociada a $x(1)$ libre es $\lambda(1) = 0$, pero como $\overline{\lambda}(t) = \lambda(t)e^{2t}$ es claro que $\lambda(1) = 0$ si y sólo si $\overline{\lambda}(1) = 0$. Las constantes m y n satisfacen por tanto

$$\begin{aligned} m\left(\sqrt{2}e^{1+\sqrt{2}}\right) - n\left(\sqrt{2}e^{1-\sqrt{2}}\right) &= 0 \\ m + n &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$m = \frac{e^{(1-\sqrt{2})}}{e^{(1+\sqrt{2})} + e^{(1-\sqrt{2})}} \quad \text{y} \quad n = \frac{e^{(1+\sqrt{2})}}{e^{(1+\sqrt{2})} + e^{(1-\sqrt{2})}}.$$

5.5. Horizonte infinito

La teoría de control también nos permite estudiar problemas de maximización con horizonte infinito. Estos modelos tienen sentido práctico cuando el efecto de la política elegida en el futuro lejano es casi nulo, ya que es difícil de justificar que en el largo plazo las hipótesis del modelo seguirán siendo válidas. Al considerar problemas del tipo

$$\text{máx} \int_0^\infty f(x,u,t)e^{-\rho t} dt$$

sujeto a $x' = g(x,u,t)$, $x(0) = x_0$ y (quizás) alguna condición terminal, puede resultar que la integral resulta impropia no converja a pesar del factor de descuento. Para garantizar su convergencia se supone usualmente que las variables de estado y control están acotadas, o bien, que la función $f(x,u,t)$ es acotada.

Para resolver estos problemas se define la función Hamiltoniana de manera idéntica al caso del horizonte finito y se aplica el principio del máximo de Pontrjagin. La condición inicial $x(0) = x_0$ es a menudo suficiente para determinar las constantes del sistema de ecuaciones diferenciales. Cuando esto no sucede se debe emplear alguna condición de transversalidad que nos permita caracterizar estas constantes. Desafortunadamente esta cuestión es muy sutil y hay cierta controversia en cuanto la generalidad de estas condiciones. Sin embargo, en la mayoría de los casos sencillos es aconsejable emplear las siguientes condiciones:

Condición terminal	**Condición de transversalidad**
$\lim_{t\to\infty} x(t)$ libre	$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$
$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_F$	$\lim_{t\to\infty} H(x(T), u(T), \lambda(T), T) = 0$ $\lim_{t\to\infty} x(T) = x_T$
$\lim_{t\to\infty} x(t) \geq x_F$	$\lim_{t\to\infty} x(t) \geq x_F, \ \lim_{t\to\infty} \lambda(t) \geq 0$ $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)(x(t) - x_F) = 0$ Este caso sólo para maximización

Example 49

Se desea encontrar $c(t)$ que maximice

$$\int_0^\infty \ln(c)e^{-\rho t}dt$$

sujeto a

$$x' = rx - c, \quad x(0) = b > 0 \ \text{ y } \lim_{t\to\infty} x(t) \text{ libre.}$$

Supondremos además que tanto $x(t)$ como $c(t)$ están acotados y $\rho > r > 0$. Tomamos

$$H = \ln(c)e^{-\rho t} + \lambda\left(rx - c\right).$$

La condición de maximización de H viene dada por

$$H_c = \frac{e^{-\rho t}}{c} - \lambda = 0$$

que nos permite expresar c en función de λ,

$$c(t) = \frac{e^{-\rho t}}{\lambda(t)}.$$

Por otro lado, el sistema asosicado es

$$\begin{aligned} \lambda' &= -r\lambda \\ x' &= rx - c. \end{aligned}$$

De la primera ecuación sabemos que

$$\lambda(t) = K_0 e^{-rt}$$

y por tanto se tiene

$$c(t) = K_1 e^{(r-\rho)t},$$

donde la constante $K_1 = 1/K_0$. La segunda ecuación del sistema es entonces

$$x' - rx = -K_1 e^{(r-\rho)t}.$$

Su solución es por tanto

$$x(t) = K_2 e^{rt} + \frac{K_1}{\rho} e^{(r-\rho)t}.$$

Como $r - \rho < 0$, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } K_2 > 0 \\ 0 & \text{si } K_2 = 0 \\ -\infty & \text{si } K_2 < 0 \end{cases}$$

Así, de la hipótesis de que $x(t)$ sea acotada deducimos que $K_2 = 0$. Del valor inicial del problema obtenemos que $K_1 = b\rho$. De esta forma,

$$x(t) = be^{(r-\rho)t}, \quad c(t) = b\rho e^{(r-\rho)t} \quad \text{y} \quad \lambda(t) = \frac{1}{b\rho} e^{-rt}.$$

Finalmente debemos verifuicar la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{b\rho} e^{-rt} = 0.$$

Example 50

Consideremos el mismo problema de encontrar $c(t)$ que maximice

$$\int_0^\infty \ln(c)e^{-\rho t}dt$$

sujeto a $x' = rx - c$, $x(0) = b > 0$, $\rho > r > 0$, pero ahora con una condición terminal diferente, digamos que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_F > 0$. Sin embargo, ya habíamos observado que independientemente del valor de K_1 se tiene que las únicas opciones para el límite de $x(t)$ cuando t tiende a infinito son ∞, 0 ó $-\infty$. Esto implica que no existen soluciones con $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_F > 0$.

Example 51

Consideremos ahora el problema de minimizar

$$\int_0^\infty 0{,}5u^2e^{-\rho t}dt$$

sujeto a $x' = ue^{-rt}$, $x(0) = 0$ y

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \geq M,$$

con $2r > \rho > 0$ y $M > 0$. Para emplear la condición de transversalidad es necesario cambiar el problema a uno de maximización:

$$\text{máx} \int_0^\infty -0{,}5u^2e^{-\rho t}dt.$$

Se define entonces la función Hamiltoniana como $H = -0{,}5u^2e^{-\rho t} + \lambda ue^{-rt}$. Debemos primero maximizar H respecto a U, así que $H_u = -ue^{-\rho t} + \lambda e^{-rt} = 0$. Al despejar u tenemos $u = \lambda e^{(\rho - r)t}$. Consideramos ahora el sistema

$$\begin{aligned} \lambda' &= -H_x = 0 \\ x' &= H_\lambda = ue^{-rt}. \end{aligned}$$

De la primera ecuación vemos que $\lambda(t)$ debe ser constante, digamos $\lambda(t) = A$. Entonces, $u(t) = Ae^{(\rho-r)t}$ y $x' = Ae^{(\rho-2r)t}$. Al integrar la última ecuación respecto a t llegamos a

$$x(t) = \frac{A}{\rho - 2r}e^{(\rho-2r)t} + B.$$

A partir de la condición inicial $x(0) = 0$ vemos que

$$B = \frac{A}{2r - \rho},$$

por lo que

$$x(t) = \frac{A}{2r - \rho}(1 - e^{(\rho - 2r)t}).$$

Para determinar la constante A debemos considerar una de las condiciones

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = M.$$

Como $\lambda(t) = A$, la primera condición implicaría que x y u serían idénticamnte cero y

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 < M.$$

Es entonces razonable pensar que el óptimo se tiene al tomar

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{A}{2r - \rho} = M.$$

Por tanto, $A = M(2r - \rho)$,

$$x(t) = M(1 - e^{(\rho - 2r)t}), \quad u(t) = M(2r - \rho)e^{(\rho - r)t} \quad \text{y} \quad \lambda(t) = M(2r - \rho).$$

Es fácil verificar que estas funciones satisfacen la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \geq M, \ \lim_{t\to\infty} \lambda(t) \geq 0 \ \text{ y } \ \lim_{t\to\infty} \lambda(t)(x(t) - M) = 0.$$

5.6. Ejercicios

1. Encuentra las funciones $x(t), u(t)$ y $\lambda(t)$ que resuelven los siguientes problemas.

   (a) Maximizar

   $$\int_0^1 \left(2x - u^2\right) dt$$

   sujeto a $x' = x + u$, $x(0) = 0$, $x(1)$ libre.

   (b) Maximizar

   $$\int_0^2 \left(2xu - u^2\right) dt$$

sujeto a $x' = x + u$, $x(0) = 1,\ x(2)$ libre.

(c) Minimizar

$$\int_0^1 \left(x^2 + u^2\right) dt$$

sujeto a $x' = u - x$, $x(0) = 4,\ x(1)$ libre.

(d) Minimizar

$$\int_0^1 \left(x + u^2\right) dt$$

sujeto a $x' = -u$, $x(0) = 0,\ x(1)$ libre.

(e) Maximizar

$$\int_0^1 \left(1 - u^2\right) dt$$

sujeto a $x' = x + u$, $x(0) = 1,\ x(1)$ libre.

(f) Maximizar

$$\int_0^4 \left(2x - u^2\right) dt$$

sujeto a $x' = 0{,}5u$, $x(0) = 0,\ x(4)$ libre.

(g) Maximizar

$$\int_0^3 2xdt$$

sujeto a $x' = x + u$, $x(0) = 5,\ x(3) \geq 8$, $u(t)\epsilon[0, 1]$.

(h) Minimizar

$$\int_0^1 u^2dt$$

sujeto a $x' = x + u$, $x(0) = 1,\ x(1) = 0$.

(i) Minimizar

$$\int_0^T x^2 + u^2dt$$

sujeto a $x' = u$, $x(0) = 1,\ x(T) = 2,\ T$ libre.

2. Encuentra el tiempo mínimo que se requiere para bajar la tasa de inflación $p(t)$ de $p(0) = 0{,}04$ a $p(T) = 0{,}02$ si $p' = 0{,}1(p - U)$ y las autoridades pueden elegir la tasa de desempleo $U(t)\epsilon[0{,}05,\ 0{,}1]$.

3. Encuentra el tiempo mínimo T que se requiere para llevar $x(t)$ de $x(0) = 1$ a $x(T) = 4$ si $x' = x + u$ y $u(t)\epsilon[-1, 1]$.

4. Minimiza
$$\int_0^1 u^2 dt$$
sujeto a $x' = x + u,\ x(0) = 0,\ x(1) \geq 3$.

5. Encuentra la senda óptima de consumo y la senda óptima de capital asociada al siguiente problema de Ramsey sin descuento:
$$\text{máx} \int_0^2 \ln(c) dt$$
sujeto a $k = c + k' + 0{,}5k,\ k(0) = 100,\ k(2) = 140$.

6. Una empresa se compromete a entregar un pedido de 10,000 unidades en una única entrega. Si $x(t)$ denota al stock diario del producto, entonces $x'(t)$ representa la tasa de producción diaria. Los costos de la empresa comprenden tanto a la producción como al almacenaje, $c(x, x') = (4{,}5)x'^2 + 2x$. Determina el costo mínimo así como el tiempo en que se deben producir las 10,000 unidades si el stock inicial es $x(0) = 0$. Observa que debes
$$\text{mín} \int_0^T \left(\frac{9}{2}x'^2 + 2x\right) dt$$
sujeto a $x(0) = 0,\ x(T) = 10,000,\ T$ libre. Este problema puede ser abordado tanto por el cálculo de variaciones como por la teoría de control. Recuerda que para emplear los métodos de la teoría de control debes introducir la variable de control $u = x'$. El Hamiltoniano correspondiente es entonces
$$H = \frac{9}{2}u^2 + 2x + \lambda u.$$

7. Considera el caso de la empresa anterior donde ahora se compromete a entregar el pedido en a más tardar 6 meses. Para esto minimiza
$$\int_0^{180} \left(\frac{9}{2}x'^2 + 2x\right) dt$$
sujeto a $x(0) = 0$, $x(180) = 10,000$ compara con el caso con T libre del problema anterior.

8. Resuelve el siguiente problema empleando el Hamiltoniano en valor corriente y con el Hamiltoniano estándar:

$$\text{máx} \int_0^8 (2K - \frac{I^2}{2})e^{-0,5t}dt$$

sujeto a $K' = -0{,}5K + I$, $K(0) = K_0$, $K(8)$ libre.

9. Emplea el Hamiltoniano con valor corriente para maximizar

$$\int_0^\infty \ln(c)e^{-\rho t}dt$$

sujeto a

$$x' = rx - c, \quad x(0) = b > 0, \quad \rho > r \;\text{ y } \lim_{t\to\infty} x(t) \text{ libre.}$$

Se supone además que el consumo y el stock de capital están acotados.

10. Emplea el Hamiltoniano con valor corriente para maximizar

$$\int_0^\infty (x - 0{,}5u^2)e^{-t/2}dt$$

sujeto a

$$x' = u - 0{,}5x, \quad x(0) = x_0 \;\text{ y } \lim_{t\to\infty} x(t) \text{ libre.}$$

La commedia è finita

Bibliografía

[1] Borges, J.L., *El Aleph*, Alianza Editorial-Emecé, 1987.

[2] Chiang, A.C., *Elements of Dynamic Optimization*, MacGraw-Hill, 1992.

[3] Chiang, A.C. y K. Wainswright, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, MacGraw-Hill, 4th ed., 2006.

[4] Friedman, M., The Role of Monetary Policy, *American Economic Review* **58** (1968), 1-17.

[5] Lomelí, H. y B. Rumbos, *Métodos Dinámicos en Economía*, Jit Press, 2a. ed., 2009.

[6] Monterroso, A., *Movimiento Perpetuo*, Joaquín Mortiz, 2a. ed., 1975,

[7] Nordhaus, W.D., The Political Business Cycle, *Review of Economic Studies*, **42** (1975), 169-190.

[8] Obst, N.P., Stabilization Policy with an Inflation Adjustment Mechanism, *Quarterly Journal of Economics* **92** (1978), 355-359.

[9] Pontryagin, L.S., et al., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Gordon and Breach Science Publishers, 1986.

[10] Ramsey, F., A Mathematical Theory of Savings, *Economic Journal* **38** (1928), 543-559.

[11] Samuelson, P.A., Interactions between the Multiplier and the Principle of Acceleration, *Review of Economic Statistics* **21** (1939), 75-78.

[12] Solow, R.M., A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics* **70** (1956), 65-94.

[13] Sydsaeter, K., et al., *Further Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2nd ed., 2008.