CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 2
Otoño 2019
Teorema del valor medio para integrales. Teorema fundamental del cálculo.
Cambio de variable.

1. Sea $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ continua. Supón que $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$. Prueba que existe $c \in [1, 3]$ tal que $f(c) = 2$.

2. Sabiendo que $\int_{-1}^{8} 3\sqrt{x+1}\,dx = 54$, encuentra un número real c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

3. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Sugerencia: para el caso $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, encuentra cotas inferior y superior para el cociente $\int_a^b f(x)g(x)\,dx / \int_a^b g(x)\,dx$ y luego utiliza el TVI.

4. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones sin calcular las integrales:

   (a) $G(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^4}\,dt.$

   (b) $G(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^4}\,dt.$

   (c) $G(t) = \displaystyle\int_0^{t^3} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

   (d) $G(x) = \displaystyle\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{1+s^3}\right)ds.$

   (e) $G(x) = \displaystyle\int_0^x x^2\left(\frac{1}{1+s^3}\right)ds.$

5. Para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ define

$$S(\theta) = \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta) = 1$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Concluye que $S(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

6. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^{x} f(t)\ dt.$$

   (a) Demuestra que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Justifica que g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y entonces calcula $g'(x)$.

8. Sea $F(x) = \int\limits_0^x \frac{t-3}{t^2+7}\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

   (b) Encuentra el punto x en donde F alcanza su valor mínimo.

   (c) Encuentra los intervalos en donde F es convexa (cóncava hacia arriba) y cóncava (cóncava hacia abajo).

   (d) Esboza la gráfica de F.

9. Demuestra que si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:

   (a) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda) dx$.

   (b) $\int_a^b f(x)\, dx = \dfrac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) dx$.

10. Sea f integrable en $[a, b]$. Utiliza el teorema de cambio de variable para mostrar que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x)\ dx.$$