CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 1
Otoño 2019
Sumas de Riemann. Integral de Riemann. Propiedades de la integral definida.

1. Escribe $\frac{2}{1} - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} - \frac{8}{7} + \frac{10}{9}$ en la notación $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

2. En cada inciso indica si la afirmación es verdadera o falsa:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k + 2 = \sum_{k=1}^{100} k + \sum_{k=1}^{100} 2.$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{99} (i+1)^2 = \sum_{i=3}^{102} (i-2)^2.$

   (c) $\dfrac{\sum_{k=1}^{100} k}{\sum_{k=1}^{100} k^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}.$

   (d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} 2 = 200.$

3. (a) Demuestra que para todo $r \neq 1$ y $n \geq 1$ se cumple

   $$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}. \qquad \text{(suma geométrica)}$$

   (b) Usa el resultado anterior para calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} \frac{2^k}{(-3)^k}$.

4. Expresa el límite como una integral definida (no calcules la integral):

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left[\left(2 + \frac{4(1)}{n}\right)^{1/2} + \left(2 + \frac{4(2)}{n}\right)^{1/2} + ... + \left(2 + \frac{4(n)}{n}\right)^{1/2} \right].$$

5. Evalúa la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$ como el límite de una suma de Riemann. Sugerencia: usa la partición de $[0,1]$ en donde

   $$x_k = c_k = \frac{k^2}{n^2}$$

   y, correspondientemente,

   $$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

6. En cada inciso argumenta si en el intervalo dado la función es: (i) continua, (ii) acotada, (iii) integrable:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \\ 5, & x = 0 \\ -2, & x \in (0, 1] \end{cases}$ en $[-1, 1]$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ en $[-10\pi, 10\pi]$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ en $[0, 1]$.

7. Calcula $\int_{-1}^{1} |2x + 1| \, dx$.

8. Determina $\int_{-2}^{a} |x| \, dx$. Analiza los casos $a \leq 0$ y $a > 0$.

9. Prueba que $\dfrac{x^6}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{x^6}{\sqrt{1 + x^2}} \leq x^6$, si $x \in [0, 1]$. Concluye que

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx \leq \frac{1}{7}.$$

10. Demuestra que si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

    Sugerencia: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

11. Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, y en caso de ser falsas proporciona un contraejemplo:

    (a) Si $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$, entonces $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

    (b) Si $f(x) \geq 0$ y $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

    (c) Si f y g son continuas y $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| > \left| \int_a^b g(x) \, dx \right|$.

    (d) Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \left(\int_a^b g(x) \, dx \right).$$