

Cálculo Diferencial e Integral I  
Departamento de Matemáticas, ITAM  
Segundo Examen Departamental  
Sábado 4 de mayo del 2019  
08:00 - 10:00



Nombre y cu: \_\_\_\_\_

1a	1b	2	3	4	5	6a	6b	7	8	Total

.....

JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS  
LEE CON CUIDADO LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS  
NO se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas  
Duración: 2 horas. Total: 10 puntos.

.....

1. Calcula los siguientes límites:

a) [1.0 pto.]  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x^2 - 2x}$ .

b) [1.0 pto.]  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^3) - 1}{\text{sen}(2x^3)}$ .

2. [1.0 pto.] Supón que  $f$  es diferenciable en  $a$ . Usa la DEFINICIÓN de derivada para probar que  $(f^2)'(a)$  existe. Explica cada paso de tu demostración indicando con claridad que propiedad, teorema o hipótesis estas usando.

3. [1.0 pto.] Sea  $h(x) = \frac{2g^3(x)}{\sqrt{x}}$ . Supón que  $g(1) = 1$ . Determina el valor de  $g'(1)$  de tal modo que  $h'(1) = 0$ .

4. [1.0 pto.] Determina el valor de  $a$  y el de  $b$  de tal manera que el punto  $P_0(1, 1)$  pertenezca a la curva  $4x^2 + ay^2 = b$  y la recta *normal* a través de  $P_0$  pase por el punto  $P_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

5. [1.0 pto.] Un avión vuela de forma paralela al piso a una altura de 5km y a una velocidad de 2km por minuto. En cierto momento pasa exactamente por encima de una estación de radar. Determina la *velocidad* con la que varía la *distancia* entre el avión y la estación de radar al cabo de 10 minutos

6. Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Supón que  $f'(c) \geq 1$  para todo  $c$  en  $(0, \infty)$  y que  $f(0) = -100$ . Prueba:

a) [1.0 ptos.] existe  $x_0 \in (0, \infty)$  ÚNICA tal que  $f(x_0) = 0$ .

b) [0.5 ptos.] dada  $M > 0$ , existe  $x_1 \in (0, \infty)$  tal que  $f(x_1) \geq M$ .

7. [1.5 pts.] Traza con detalle la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ . Incluye: dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidades, asíntotas, límites relevantes y coordenadas de todos los puntos críticos.

Hoja para gráfica

8. [1.0 pto.] Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede ser inscrito en la cuarta parte de la elipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$ .

Hoja extra