

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Laboratorio 16

Primavera 2019

Series de potencias. Series de Taylor

1. Encuentra el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{\pi^{n+2}} x^{n+3}.$$

(b) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x+2)^n}{4^n (2n)}.$$

(c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$

(d) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

(e) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n.$$

2. Considera la serie potencias  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+a)^{n+1}}$ , con  $a > 0$ . Determina  $a$  de modo que el radio de convergencia de la serie sea igual 3.

3. (a) Determina el radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$ .

(b) Utilizando el inciso anterior, calcula  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}$ .

4. Determina el valor exacto de  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

Sugerencia: Deriva término a término la serie

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

5. Demuestra que  $\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .

Sugerencia: Usa  $\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$  e integra término a término la serie de potencias de  $\frac{1}{1+t^2}$ .

6. La serie de Taylor generada por  $f(x) = e^x$  en  $x_0 = 0$  es  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . A partir de esta información:
- Calcula  $1 + \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \frac{(\ln 2)^4}{4!} + \dots$
  - Encuentra la serie de Taylor generada por  $g(x) = e^{-2x^2}$  en  $x_0 = 0$ .
  - Demuestra que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1$ , con  $\lambda > 0$  una constante.
7. La serie de Taylor generada por  $f(x) = \ln(1+x)$  en  $x_0 = 0$  es  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ . A partir de esta información:
- Encuentra la serie de Taylor generada por  $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  en  $x_0 = 0$ .
  - Encuentra la serie de Taylor generada por  $f(x) = x \ln(1+x^2)$  en  $x_0 = 0$ .
8. ¿Qué función tiene como serie de Taylor  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n$ ? ¿Para qué valores de  $x$  es válido este desarrollo?
9. Considera la integral  $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ .
- Expresa la integral como una serie infinita.
  - Determina el valor de la integral con un error menor que  $10^{-4}$ .