

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Laboratorio 14

Primavera 2019

Sucesiones. Propiedades de convergencia de sucesiones

1. Calcula el límite de cada sucesión  $\{a_n\}$  o justifica si ésta diverge:

(a)  $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$ .

(b)  $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$ .

(c)  $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ .

(d)  $a_n = nr^n$ , si  $|r| < 1$  es fijo.

(e)  $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$ .

(f)  $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$ .

(g)  $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ .

(h)  $a_n = (\ln n)^{1/n}$ . Sugerencia:  $1 \leq \ln n \leq n$ , para  $n \geq 3$ .

(i)  $a_n = (p(n))^{1/n}$ , en donde  $p(x) = b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m$  es un polinomio de grado  $m$  y  $b_0, b_1, \dots, b_m$ , son reales positivos fijos.

2. Usa la prueba del cociente o la prueba de la raíz  $n$ -ésima para sucesiones (enunciadas al final de este laboratorio) para estudiar la naturaleza de las siguientes sucesiones  $\{a_n\}$  :

(a)  $a_n = n^5 e^{-n}$ .

(b)  $a_n = \frac{5^n}{n!}$ .

(c)  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ .

(d)  $a_n = \frac{n!n!}{(2n)!}$ .

3. Demuestra que:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$ ,  $a, b > 0$ .

4. Sea  $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Demuestra que  $I_n = (-1)^n n!$   
 Sugerencia: integra por partes y calcula la integral impropia usando la regla de L'Hopital.
5. Muestra que si  $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$ , entonces  $a_n$  es una suma de Riemann para  $\int_0^1 x dx$  para  $n \geq 1$ . Encuentra  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
6. Demuestra que toda sucesión convergente está acotada.
7. Prueba rigurosamente ( $\varepsilon$  y  $N$ ) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{1 + n^2} = 4.$$

**Prueba del cociente para sucesiones.** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión de reales positivos tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$  y si  $0 \leq L < 1$ , entonces  $\{a_n\}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Prueba de la raíz n-ésima para sucesiones.** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión de reales no negativos tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$  y si  $0 \leq L < 1$ , entonces  $\{a_n\}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .