CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 13
Primavera 2019
Aproximación polinomial y teorema de Taylor. Residuo y estimación del error de aproximación

1. Obtén el polinomio de Taylor de grado n para las siguientes funciones $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = \operatorname{senh}(x),\ \ x_0 = 0.$
   (b) $f(x) = x^2 - x - 2,\ \ x_0 = -1.$

2. Obtén el polinomio de Taylor de grado 2 para las siguientes funciones $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = 3 + \int_2^{2x} e^{t^2-4}\, dt,\ x_0 = 1.$
   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } \ x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \ x = 0. \end{cases},\ \ x_0 = 0.$

3. A partir del polinomio de Taylor de grado n para e^x en $x_0 = 0$ determina el polinomio de Taylor de grado 3 de las siguientes funciones $f(x)$ en $x_0 = 0$:

   (a) $f(x) = e^{-2x}.$
   (b) $f(x) = e^{-x^2}.$
   (c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}.$

4. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x) = \tan^{-1}(x)$ en $x_0 = 0$, y úsalo para aproximar el valor de $\pi/4$.

5. (a) Demuestra que si $|x|$ es pequeño y $0 < \alpha \leq 1$, entonces

   $$(x+1)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2.$$

   (b) Usa esta aproximación para estimar $\sqrt{1.4}$.

6. Aproxima el valor de $e^{1/2}$ con un error menor que 0.001.

7. Determina la exactitud de la aproximación

   $$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

   sobre el intervalo $[-1, 1]$.

8. Usando el teorema de Taylor, demuestra que

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| < \frac{1}{6}, \quad \forall x \in [0,1] \, .$$

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^5(\mathbb{R})$ con polinomio de Taylor de grado 5 en $x_0 = 1$ dado por

$$P_{5,1}(x) = \frac{1}{2} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

   Determina $f^{(k)}(1)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$, e indica justificando si f tiene o no un extremo local en el punto 1.

10. Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $f \in C^2(I)$. Usa la fórmula de Taylor para demostrar que, para cualquier $a \in I$,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$