Cálculo Diferencial e Integral I

Laboratorio 11 - El TVM y aplicaciones

Otoño 2018 - ITAM

1. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Supón que $f'(c) \neq 0 \quad \forall c \in (a, b)$. Prueba que si $x_1 \neq x_2$ pertenecen a $[a, b]$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. (Es decir f es INYECTIVA)

2. Supón que $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $[0, 1]$, diferenciable en $(0, 1)$ y $-2 \leq f'(c) \leq 3 \quad \forall c \in (0, 1)$.

   Prueba que: $\quad -2x + f(0) \leq f(x) \leq 3x + f(0) \quad \forall x \in [0, 1]$.

3. Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$. Prueba que:

   a) f es continua en cada $x_0 \in [-1, 1]$ (Formal).
   b) f es diferenciable en cada $c \in (-1, 1)\backslash\{0\}$ (Dibuja).
   c) $\nexists \quad c \in (-1, 1)$ tal que: $f'(c) = 0$. ¿ Por qué <u>no</u> se contradice el Teorema de Rolle?

4. Sea $f(x) = \sqrt{x(2 - x)^2}$. Prueba que existen $c, d \in (0, 2)$ en las que $f'(c) = 1$ y $f'(d) = -1$. (<u>NO DESPEJES)</u>

5. Supón que $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, que f' y f'' existen en (a, b) y además que $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Prueba que la $c \in (a, b)$ garantizada por el TVM es única (supón que hay dos o usa la inyectividad de f').

6. Prueba que $\sqrt{1 + x} \leq 1 + \dfrac{x}{2} \quad \forall x \geq 0$. (Sugerencia: Sea $f(x) = \sqrt{1 + x}$, $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} \quad$ y $\quad h = g - f$, examina h' en $(0, x)$).

7. Supón que $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \quad \forall x \neq y$. Prueba que f es constante. (Usa el Teorema del valor medio y prueba que $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$).