CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 8
Primavera 2019
Integración por partes. Integrales trigonométricas

1. Encuentra las siguientes integrales:

   (a) $\int \dfrac{\ln(x)}{x^2} dx$.

   (b) $\int e^{\sqrt{x}} dx$. (Primero haz una sustitución y luego integra por partes.)

   (c) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$.

   (d) $\int_0^1 \dfrac{x^3}{(1+x^2)^3}\, dx$.

2. Utilizando una integración por partes demuestra la siguiente fórmula de reducción de grado

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable tal que

$$f''(x) = -\frac{3}{x^4}\cosh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^5}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

   para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(1) = \cosh(1)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ está definida por

$$f(x) = -\frac{1}{x}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right) + \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. (a) Demuestra que

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x).$$

   (b) Utilizando el inciso anterior, determina: (i) $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x)dx$, (ii) $\int \log_2(x)dx$.

5. Encuentra las siguientes integrales:

   (a) $\int \operatorname{sen}^5(x)\ dx$.

   (b) $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)\ dx$.

   (c) $\int \tan^5(x)\sec^4(x)\ dx$.

   (d) $\int \tan^3(x)\sec^5(x)\ dx$.

   (e) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{2}}\, dx$.

6. Demuestra que para $m, n \in \mathbb{N}:$

   (a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0.$

   (b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$