

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Laboratorio 7

Primavera 2019

Formas indeterminadas

1. Sin utilizar la regla de L'Hopital prueba que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x)}{x} = 1 \quad (\text{cambia variable}).$$

2. Calcula, si existen, los siguientes límites:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin(\pi x)}$ .
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$ .
- (c)  $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{x^{1-a} - 1}{1-a}$ ,  $x > 0$ .
- (d)  $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}$ .
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(-1/x^2)}}{x}$ .
- (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 4^x}{5^x - 2^x}$ .
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$ .
- (h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(1+6x) - \ln(4+3x)]$ .
- (i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x} [\pi - 2 \tan^{-1}(\sqrt{x})])$ .
- (j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(3e^x + 1))$ .
- (k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x$ ,  $a > 0, b > 0$ .
- (l)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\cot(x)}$ .

3. Sea  $f$  una función continua en  $\mathbb{R}$  y

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Demuestra que  $F$  es continua en el punto  $x = 0$ .
- (b) ¿En qué condiciones se puede garantizar que  $F$  es diferenciable en el punto  $x = 0$ ?

4. Considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 \operatorname{senh} \left( \frac{x}{1-x} \right), & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 + \tan^{-1}(x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

en donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son constantes reales. Determina  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de modo que la función  $f$  sea continua y diferenciable en  $\mathbb{R}$ .

5. Sea  $f$  una función continua en  $\mathbb{R}$ . Demuestra que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \int_0^{1/x} f(t) dt \right)^x = e^{f(0)}.$$