

Cálculo Diferencial e Integral I

Laboratorio 6 - El teorema de Bolzano

Primavera 2019 - ITAM

1. Pruebe que existe al menos una solución para la ecuación $\sin(x) = x - 1$.
¿Hay más? (DIBUJA)

2. Encuentra un intervalo de longitud $= \frac{1}{2}$ que contenga una solución de la ecuación:

$$(x - 1)^{2019} + (x + 1)^{2019} = 2019$$

3. Prueba: Si n es par, $p(x) = 1 + x + \cdots + x^n$ no tiene raíces y si n es impar $p(x)$ tiene exactamente una raíz.
(Sugerencia: Considera $(1 - x)p(x)$)

4. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua. Supón que $g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas satisfacen:

a) $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$

b) $h(0) = 1$ y $h(1) = 0$

Prueba que $\exists c_1, c_2 \in [0, 1]$ tales que $f(c_1) = g(c_1)$ y $f(c_2) = h(c_2)$

5. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Prueba que $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f(b)$
(Considera 2 casos, $f(a) = f(b)$ y $f(a) \neq f(b)$)

6. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(1)$. Sea $n \geq 2$ fijo.
Prueba $\exists c \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{n})$
(Examina $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$ en $[0, 1 - \frac{1}{n}]$)