CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 5
Primavera 2019
Funciones hiperbólicas y sus inversas

1. Demuestra que para todo x:

   (a) $e^x = \cosh(x) + \operatorname{senh}(x)$.

   (b) $(\cosh(x) + \operatorname{senh}(x))^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx)$.

2. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\int 6\cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right)\,dx$.

   (b) $\int_0^{\ln 10} 4\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$.

   (c) $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1+\cosh(x)}\,dx$. (Sugerencia: desarrolla $\cosh(x) = \cosh\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$.)

3. Sean

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + \int_{\cos(\theta)}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

   y

$$B(x) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(x)\cosh(x) - \int_{1}^{\cosh(x)} \sqrt{s^2-1}\,ds, \quad x \geq 0.$$

   Prueba que $A(\theta) = \frac{\theta}{2}$ para todo θ y $B(x) = \frac{x}{2}$ para todo x. (Sugerencia: $A'(\theta) = \frac{1}{2}$ y $B'(x) = \frac{1}{2}$ por la regla de Leibniz.)

4. Caracteriza la función inversa del coseno hiperbólico y demuestra que:

   (a) $\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

   (b) $\left(\cosh^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

5. Determina la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $y = \cosh^{-1}(2\sqrt{x+1})$.

   (b) $y = \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\theta}$.

6. Las funciones $\tanh^{-1}(x)$ y $\coth^{-1}(x)$ tienen la misma derivada, $\frac{1}{1-x^2}$. ¿Por qué no difieren en una constante?

7. Demuestra que

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

8. Determina la primitiva de cada una de las siguientes funciones, efectuando el cambio de variable indicado:

   (a) $f(x) = \sec(x), \quad t = \operatorname{sen}(x).$
   (Sugerencia: Integra usando la sustitución indicada y luego utiliza el ejercicio 7.)

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x = \cosh(t).$

9. Calcula las siguientes integrales y escribe tu respuesta en términos del logaritmo natural:

   (a) $\int_0^{2\sqrt{3}} \dfrac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

   (b) $\int_1^{2} \dfrac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}.$