

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 3

Primavera 2019

Integral por sustitución. La función logaritmo natural. Funciones inversas.

1. Determina las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2x}$.

(b) $\int \frac{x}{x+1} dx$.

(c) $\int x^5 \sqrt{x^2 - 1} dx$.

(d) $\int \frac{x}{1+x \tan x} dx$. Sugerencia: Usa la sustitución $u = x \sin x + \cos x$.

2. Calcula las siguientes integrales, usando el método de sustitución para integrales definidas:

(a) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin |\pi - 2x| dx$.

(b) $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$, con $x \geq 0$.

(c) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$. (Observa que $\ln e = 1$.)

(d) $\int_0^{\pi/2} \frac{5 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2} dx$.

3. A partir de la gráfica de $y = \ln x$ bosqueja la gráfica de:

(a) $y = \frac{1}{\ln x}$.

(b) $y = \ln(1/x)$.

(c) $y = \ln|x|$.

(d) $y = |\ln x|$

4. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

(a) $f(x) = (\ln x) \ln(\sin x)$.

(b) $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln(1/x)$.

(c) $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$.

(d) $f(x) = \ln^2 \left(\frac{3x+2}{x^4} \right)$.

5. Utiliza derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2 + 1)^{5/2} \sqrt{2 + \sin x}}.$$

6. Utiliza derivación implícita para calcular dy/dx , si $y = \ln(xy^2)$.

7. Sea $L : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(1+t)}{t} = 1. \quad (*)$$

Prueba que $L(x) = \ln x$, para todo $x > 0$. (Sugerencia: Prueba que $L(1) = 0$ y usa (*) para demostrar que $L'(x) = 1/x$.)

8. (a) Prueba que si $t \geq 1$, entonces $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$, y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

(b) Concluye que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. (Usa el teorema del sandwich).

9. En cada inciso, encuentra un intervalo en el que f tenga una inversa (halla un intervalo en el que $f' > 0$ o $f' < 0$). No es necesario encontrar f^{-1} .

(a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

(b) $f(x) = \int_{x^2}^x \ln t \, dt$, $0 < x < 1$.

10. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

(a) Muestra que f es creciente y diferenciable en \mathbb{R} .

(b) Calcula $\frac{d}{dx} f^{-1}(9)$. (Observa que $f(2) = 9$.)