

Cálculo Diferencial e Integral II  
Examen Final  
Departamento de Matemáticas, ITAM  
20 de diciembre de 2018  
**Tipo A**

Nombre y CU: \_\_\_\_\_

1	2a	2b	2c	3	4a	4b	4c	5a	5b	6	7a	7b	7c	7d	Total

**JUSTIFICAR CON DETALLE LAS RESPUESTAS**

No se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas

Usar las tres últimas páginas si es necesario

Duración: 2:30 horas

1. **(0.75 pts.)** Sea  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Calcula  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . ¿Qué puedes concluir sobre el  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ? Justifica.

2. En cada uno de los siguientes incisos, justifica si la serie converge o diverge:

(a) **(0.5 ptos.)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{5n+1} \right)^{n/2}$  .

(b) **(0.5 ptos.)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{7} \right)^{1/n}$  .

(c) **(0.5 ptos.)**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(3n)!}$ .

3. **(1.25 pts.)** Encuentra el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+3)^n}{2^n \sqrt{n}}.$$

4. Determina las siguientes integrales:

(a) **(0.75 ptos.)**  $\int \operatorname{sen}^{-1}(3x) dx$ .

(b) (1 pto.)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)(x+4)}$ .

(c) (1 pto.)  $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1 - e^x} dx$ . Utiliza la sustitución  $u = e^x$ .

5. En cada uno de los siguientes incisos, calcula el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

(a) **(0.75 ptos.)**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+1}}{6^n}$ .



(b) **(0.75 ptos.)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ . Usa fracciones parciales.

6. (0.75 ptos.) Determina el valor exacto de  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

**Sugerencia:** Deriva término a término la serie

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

7. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ \tan^{-1}(x), & x < 0. \end{cases}$$

- (a) **(0.4 ptos.)** Demuestra que  $f$  es diferenciable en  $x = 0$ .
- (b) **(0.4 ptos.)** Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- (c) **(0.5 ptos.)** Determina los extremos locales y los intervalos de monotonía de  $f$ .
- (d) **(0.2 ptos.)** Grafica  $f$ .

Hoja extra

Hoja extra

Hoja extra