Cálculo Diferencial e Integral II
Primer Examen Departamental
Departamento de Matemáticas, ITAM
21 de septiembre de 2018
**Tipo A**

Nombre y CU: ______________________________________________

| 1 | 2 | 3a | 3b | 4 | 5a | 5b | 6a | 6b | 6c | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

JUSTIFICAR CON DETALLE LAS RESPUESTAS
No se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas
Usar el reverso de la hoja si es necesario
Duración: 2:00 horas

1. (**1.5 ptos.**) Utilizando el **método de sustitución en integral definida** calcular
$$\int_3^9 \frac{dx}{x\left(\log_3 x\right)^2}.$$

2. (**1.5 ptos.**) Determinar una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **que sea par**, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{e^t}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Sugerencia: Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo.

3. Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

   (a) **(1 pto.)** $f(x) = x^{\sqrt{x}} x^{\ln x}, \;\; x > 0.$

   (b) **(1 pto.)** $g(x) = \int_1^{e^{(x^2)}} \ln\left(\sqrt{t}\right)\, dt$. Simplificar la respuesta.

4. (**1 pto.**) Sea $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

y

$$\lim_{t \to 0} \frac{L(1+t)}{t} = 1. \quad (*)$$

Demostrar que $L(x) = \ln x$ para todo $x > 0$. (Sugerencia: Probar que $L(1) = 0$ y usar (*) para demostrar que $L'(x) = 1/x$.)

5. Determinar las siguientes integrales:

   (a) (**1 pto.**) $\int_{-2}^{2} e^{-3|x-2|}\, dx$.

   (b) (**1 pto.**) $\int \dfrac{1}{3+x^{1/3}}\, dx$. Utilizar la sustitución $u = 3 + x^{1/3}$.

6. Considerar la función definida por $f(x) = -\pi + \cos^{-1}(1 - \ln x)$.

   (a) (**1 pto.**) Determinar: (i) el dominio de $f$, (ii) la imagen (rango) de $f$, (iii) los ceros de $f$, (iv) las soluciones de la ecuación $f(x) = -\pi$.

   (b) (**0.5 ptos.**) Demostrar que $f$ es inyectiva.

   (c) (**0.5 ptos.**) Caracterizar la función inversa de $f$ (dominio, imagen y regla de correspondencia).

Hoja extra