Cálculo Diferencial e Integral I

Laboratorio 5 - Continuidad y el TVI

Otoño 2018 - ITAM

1. Prueba que **no** existe $a \in \mathbb{R}$ tal que la función

$$f(z) = \begin{cases} a^2x^2 + 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ ax + 1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

es continua en $x_0 = -1$.

2. A partir de las propiedades de los límites prueba que toda función polinomial $y = p(x)$ es continua es $(-\infty, \infty)$ y toda función racional $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ es continua en $(-\infty, \infty)$ excepto donde $q(x)$ se anula.

3. Determina un intervalo de longitud **igual** a $\frac{1}{8}$ que contenga una raíz del polinomio $p(x) = x^3 + x - 1$.

4. Prueba que las gráficas de $f(x) = x + \cos(x)$ y de $g(x) = x^2$ se intersectan al menos en **dos** puntos (puedes suponer que f es continua en $\mathbb{R}$).

5. Sea: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Supón que $f(c) \neq 0 \ \forall c \in [a, b]$. Prueba que $f(x)f(y) > 0 \ \forall x, y \in [a, b]$.

6. Sea: $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Supón que $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$. Prueba que $\forall d \in \mathbb{R} \ \ \exists \ \ c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. Ilustra este resultado con $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x(1 - x)}$$