

Cálculo Diferencial e Integral I
Departamento de Matemáticas, ITAM
Examen Final Departamental
Primavera 2017



Nombre y cu: _____

1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	5	6	7a	7b	Total

JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS
LEE CON CUIDADO LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS
NO se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas
Usa el reverso de cada hoja si es necesario
Tiempo: 2:00 horas

.....
1. Calcula:

a) [1.0 ptos.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(x)} - \sqrt{1 - \sin(x)}}{x}$.

b) [1.0 ptos.] $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(1 - \cos \left(\frac{1}{t} \right) \right)$.

2. [1.0 ptos.] Determina las coordenadas del punto $P = (x, y)$ sobre la gráfica de $y = \sqrt{x}$ más próximo a $P_0 = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ así como la distancia mínima.

3. a) [1.0 ptos.] Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(a) \neq f(b)$. Prueba: Existe $c \in (a, b)$ tal que: $f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$. Justifica.
- b) [0.5 ptos.] Prueba: Si además f es diferenciable en (a, b) y $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces la c del inciso anterior es *única*.

4. a) [1.0 pts.] Supón que $3 \leq a < b \leq 8$. Prueba las desigualdades:

$$\frac{b-a}{6} \leq \sqrt{1+b} - \sqrt{1+a} \leq \frac{b-a}{4}.$$

- b) [0.5 pts.] Prueba que: $2.004 < \sqrt{4.024} \leq 2.006$ (usa el inciso anterior).

5. [1.5 ptos.] Determina todos los puntos P sobre la lemniscata de Bernoulli con ecuación: $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ que satisfacen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = 0$.

6. [1.0 ptos.] Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 15\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 20, \quad y(1) = 0.$$

7. a) [1.0 ptos.] Calcula: $f\left(\frac{1}{2}\right)$ si sabes que $\int_0^x f(t)dt = \pi \cos(\pi x)$.

b) [0.5 ptos.] Calcula: $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1 + \sqrt{t}} dt \right)$ cuando $x = 3$.

Hoja extra