Cálculo Diferencial e Integral I
Departamento de Matemáticas, ITAM
Segundo Examen Departamental
Primavera 2017

A

Nombre y cu: ______________________________

1a	1b	1c	1d	2	3a	3b	4	5	6	7	Total

JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS
LEE CON CUIDADO LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS
NO se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas
Usa el reverso de cada hoja si es necesario
Tiempo: 2:00 horas

1. Calcula:

   a) [0.5 ptos.] $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{|x^2 - 3x|}$.

   b) [0.5 ptos.] $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen}(2x) - 1}{4x - \pi}$.

c) [0.5 ptos.] $f'(1)$ si $f(x) = \left(\dfrac{g(x^3)}{(g(x))^2} \right)^{1/2}$ y $g(1) = 1$ y $g'(1) = 2$.

d) [0.5 ptos.] $\left(\operatorname{sen} \left(\dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \right) \right)' (\sqrt{2})$.

2. [1.5 ptos.] Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ Prueba que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene *exactamente* dos soluciones en $(-\infty, \infty)$. *Sugerencia:* considera $h(x) = f(x) - g(x)$. Examina $h(0)$ y los signos de $h'(x)$.

3. a) [0.5 ptos.] Enuncia con detalle el teorema de valor medio (TVM) de Lagrange.

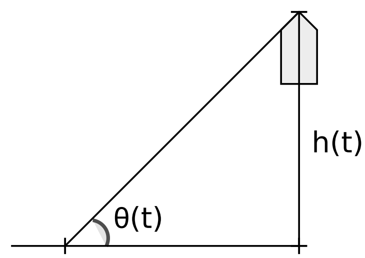
   b) [1.0 ptos.] Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ diferenciable con $f(0) = 0$. Supón que $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ esta dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Prueba: si f es creciente entonces g es creciente. *Sugerencia:* prueba que $g'(x) > 0$. Usa que $f(0) = 0$ y el TVM.

4. [1.0 ptos.] Sea $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2}$. Obtén $\text{máx}(f)$ y $\text{mín}(f)$ en $[0,4]$ y las abcisas correspondientes. *Sugerencia:* Considera $f^2(x)$.

5. [1.5 ptos.] Traza con todo detalle la gráfica de $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Incluye: dominio, imagen, coordenadas de todos los puntos críticos, extremos locales, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de convexidad y concavidad, límites relevantes.

6. [1.5 ptos.] Determina las dimensiones (r y h) del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio $R > 0$ dada. Dibuja y recuerda que: Vol(cono) $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

7. [1.0 ptos.] El acorazado USS TRUMP se encuentra a 2 millas de una base norcoreana de lanzamiento de proyectiles. Un proyectil sale disparado y sigue una trayectoria vertical. Un "marine" registra que: $\frac{d\theta}{dt} = 1$ radián/min donde θ es el ángulo de inclinación del proyectil y el observador con la horizontal. Si $h(t)$ denota la altitud alcanzada por el proyectil después de t segundos calcula: $\left(\frac{dh}{dt}\right)_{t_0}$ en el instante t_0 en el que $h(t_0) = 2$ millas. *Sugerencia:* usa $\tan\theta$.



Hoja extra