Cálculo Diferencial e Integral I

Laboratorio 9 - Aplicaciones del TVM de Lagrange

Primavera 2018 - ITAM

1. Supón que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y es dos veces diferenciable en (a, b). Supón que f tiene tres raíces en $[a, b]$. Prueba que f' tiene al menos dos raíces en (a, b) y que f'' tiene al menos una raíz en (a, b) (GENERALIZA). Ilustra esto con $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(x^2 - 1)$.

2. Supón que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b). Supón que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Prueba que $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$. Exhibe explícitamente a $c \in (0, 1)$ con $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ y con $f(x) = x + \sin(x)$ y $g(x) = x$ en $(0, 2\pi)$ (2 soluciones; dibuja).

3. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$. Prueba que $f(-1) = 0 = f(1)$ pero <u>no</u> existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no hay contradicción con el teorema de Rolle? (Dibuja).

4. Supón que $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y satisface $f(0) = 1$ y $f'(c) \geq 2 \; \forall c \in (0, 10)$. Prueba que:

   a) $f(x) \geq 1 + 2x \; \forall x \in [0, 10]$ (usa la forma "producto" del TVM).

   b) $\forall d \in [1, 21] \; \exists$ una única $c \in [0, 10]$ tal que $f(c) = d$ (combina el inciso a) con el TVI).

5. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Supón que $a \neq 0$ y que $b^2 - 3ac < 0$. Prueba que f tiene exactamente una raíz real (usa el TVI y el TVM).