CUADERNO DE EJERCICIOS PARA DESPUÉS DE UN CURSO DE TEORÍA DE LA MEDIDA

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

ITAM, 2013

Introducción

Las siguientes páginas contienen una colección de 100 ejercicios de Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue. Una gran cantidad de ellos están acompañados con sugerencias que a mi juicio son suficientes para su solución, aunque no necesariamente son el único camino hacia ella. También debo mencionar que he procurado no incluir ejercicios estándar, lo que ha convertido este trabajo en uno que requiere de un lector que conozca bien la teoría. En términos gastronómicos, se trata del postre, más que del aperitivo.

Se incluye al final una bibliografía recomendada que contiene aún más ejercicios.

Deseo hacer patente mi agradecimiento a Javier Sagastuy, por su paciente labor.

ITAM Febrero de 2013

Dr. Guillermo Grabinsky S.

Ejercicios

1. Una clase no vacía $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es monótona (en el sentido de Halmos) si para cualquier sucesión creciente (o decreciente) $(E_n) \subset \mathcal{P}(X)$ se tiene: $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ $(\cap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M})$. Pruebe:

   a) Todo $\sigma-$anillo es una clase monótona, y todo anillo que sea clase monótona es un $\sigma-$anillo.

   b) La intersección arbitraria de clases monótonas es una clase monótona. (NOTA: Esto nos permite considerar la clase monótona generada por una subclase $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$ denotada $\mathcal{M}(\mathbb{E})$).

2. Sea $\mathcal{R}$ un anillo, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = S(\mathcal{R})$.
   (Sugerencia: Por 1. a) $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset S(\mathcal{R})$; para la otra contención es suficiente probar que $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ es un $\sigma-$anillo. Proceda como sigue: para $F \subset X$ defina: $\mathcal{K}(F) = \{E \subset X : E - F, F - E, E \cup F \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\}$. Pruebe que $\mathcal{K}(F)$ es una clase monótona que contiene a $\mathcal{R}$ y así $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{K}(F)$. Note que $E \in \mathcal{K}(F) \iff F \in \mathcal{K}(E)\ \forall \quad F \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ y $\forall \quad E \in \mathcal{K}(F)$. Concluya el resultado.)
   (NOTA: El siguiente corolario es llamado en ocasiones el lema de las clases monótonas. COR: Si $\mathcal{M}$ es una clase monótona y $\mathcal{M} \supset \mathcal{R}$, entonces $\mathcal{M} \supset S(\mathcal{R})$. Este resultado da lugar a un método alternativo, con frecuencia muy útil, para verificar que una clase de conjuntos constituye una $\sigma-$álgebra).

3. *a*) Sea $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ una $\sigma-$álgebra. Pruebe: existe una partición a lo más numerable $\mathbb{P} \subseteq S$ tal que $S = S(\mathbb{P})$.
   (Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $S_n = \{E \in S : n \in E\}$. Defina una relación de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ poniendo $n \sim m \iff m \in E\ \forall\ E \in S_n$. Denote por $[n]$ la clase de equivalencia de n. Considere $\mathbb{P} = \{[n] : n \in \mathbb{N}\}$.)

   b) Pruebe que la partición $\mathbb{P}$ es única salvo por el orden de los elementos.

   c) Sea $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ una $\sigma-$álgebra infinita y $\mathbb{P} = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ la partición numerable tal que $S = S(\mathbb{P})$. Pruebe: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es $S-$medible $\iff f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{A_n}$ con $c_n \in \mathbb{R}$.

4. Sea $f \in \overline{\mathcal{M}^+}(X,S)$. Pruebe que $\sqrt{f} \in \overline{\mathcal{M}^+}(X,S)$ usando (y probando) la siguiente identidad: $\sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \operatorname{ínf}_{r\in\mathbb{Q}} \left\{\dfrac{a}{r} + r\right\}$.
(Sugerencia: Considere $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \dfrac{a}{x} + x$ y derive).
Generalice a otras potencias.

5. Sea (X,S) un espacio medible y $f,g : X \to \mathbb{R}$ $S-$medibles. Si $H : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $h(x) = H(f(x),g(x))$ es $S-$medible.

6. Sea $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ continua en cada variable. Pruebe que f es Borel medible.
(Sugerencia: Defina $F^{(n)}(s,x) = \begin{cases} f(0,x) & si\ s = 0 \\ f\left(\dfrac{k-1}{2^n}, x\right) & si\ s \in \left(\dfrac{k-1}{2^n}, \dfrac{k}{2^n}\right] \end{cases}$ $(k = 0,...,2^n)$. Entonces $\operatorname{lím}_{n\to\infty} F^{(n)} = f$. Note que basta que $f_s : [0,1] \to \mathbb{R}$ sea Borel medible $\forall\ s$ en algún subconjunto denso de $[0,1]$ y $f^x : [0,1] \to \mathbb{R}$ sea continua por la derecha (o por la izquierda).)

7. Sea (X,S,μ) un espacio de medida y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en S tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \infty$. Sea $C_k = \{x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n : x$ pertenece a al menos k conjuntos $A_n\}$. Pruebe:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n) \iff \mu(C_2) = 0$.

   b) Si $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \le \mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n) + \varepsilon$, entonces $\mu(C_k) \le \dfrac{\varepsilon}{k-1}$ $(k \ge 2)$.
   (Sugerencia: $(\cup_{n=1}^{\infty}A_n) \setminus C_k = \{x \in \cup_{n=1}^{\infty} : \chi_{A_n}(x) \le k-1\}$ $(k \ge 2)$.)

8. Sean $f \in \overline{\mathcal{M}^+}(X,S)$ y $E \in S$ fijos. Pruebe: $\int_E f d\mu = \sup_{\Pi}\sum_j \operatorname{ínf}\{f(x) : x \in E_j\}\mu(E_j)$ donde el supremo se toma sobre todas las particiones <u>finitas</u> medibles $\Pi = \{E_1,...,E_n\}$ de E.
(NOTA: La anterior es una definición alternativa de la integral de Lebesgue.)

9. Sea X infinito y $\rho : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ la medida de conteo. Para $f : X \to [0,+\infty]$ dada, defina: $\mu(E) = \int_E f d\rho \quad \forall\ E \subseteq X$. Pruebe: $\mu(E) = \sup\{\int_F f d\rho : F \subseteq E, F \text{ finito}\}$.

10. Sea $f \in \overline{\mathcal{M}}(X,S)$. Pruebe: $f \in \mathcal{L}_1(\mu) \iff \{\int |f_r| d\mu : r > 0\}$ está acotado, en cuyo caso: $\int f d\mu = \operatorname{lím}_{r\to\infty}\int f_r d\mu$, donde $f_r = \operatorname{mín}\{r, \operatorname{máx}\{f_1, -r\}\}$ es el truncamiento de f determinado por r.

11. Sea (X,S,μ) un espacio de medida y $f,g \in \mathcal{M}^+(X,S)$. Pruebe:

   a) $(\int fg^r d\mu)^{m-t} \le (\int fg^t d\mu)^{m-r}(\int fg^m d\mu)^{r-t}$ si $0 < t < r < m$. (Desigualdad de Rogers (1888))
   (Sugerencia: Si $p = \dfrac{m-t}{m-r}$ y $q = \dfrac{m-t}{r-t}$, entonces $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.)

b) La desigualdad de Hölder usual es consecuencia de la desigualdad de Rogers.

(Sugerencia: Sea $m = 2$, $t = 1$, ahora tome $p = \dfrac{1}{2-r}$ y $q = \dfrac{1}{r-1}$.)

12. Pruebe el siguiente resultado de F. Riesz (1910): Sea $p \in (1, \infty)$ fijo y $A, B > 0$ constantes, entonces: $\int |f|^p d\mu \leq A \iff \int |fg| d\mu \leq A^{1/p} B^{1/p}$ $\forall \quad g \in \mathcal{M}(X, S)$ con $\int |g|^q d\mu \leq B$. ¿Es cierto el resultado correspondiente para $p = 1$ o $p = +\infty$?

13. Sea $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ $(1 < p < \infty)$ fija y defina $g = (||f||^{-p/q}(sgn\, f)|f|^{p-1}$ con q el exponente conjugado de p. Pruebe:

    a) $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$.

    b) $||g||_q = 1$.

    c) $\int fg d\mu = ||f||_p$.

    d) Concluya que $||f||_p = \text{máx}\{\int fg d\mu : g \in \mathcal{L}_q(\mu),\ ||g||_q = 1\}$.

    e) ¿Existe un análogo si $p = 1$ y $q = \infty$ o $p = \infty$ y $q = 1$?

14. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $f : X \to \mathbb{R}$ S-medible dada. Sea $w(t) = \mu\{x \in X : |f|(x) \geq t\}$. Pruebe: Si $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, entonces $\int |f|^p d\mu = -p \int_0^\infty t^{p-1} w(t) d\lambda$ $(p > 1)$.
(Sugerencia: verifique que $\int |f|^p d\mu = -\int_0^\infty t^p dw(t)$. Ahora integre por partes.)

15. Sea $t > 0$ fijo. Pruebe:

    a) $\int_0^\infty e^{-tx} d\lambda(x) = \dfrac{1}{t}$.
    (Sugerencia: si $t \geq a > 0$, entonces $e^{-tx} \leq e^{-ax} \in \mathcal{L}_1(0, \infty)$.)

    b) $\int_0^\infty x^n e^{-x} d\lambda = n!$.
    (Sugerencia: use el T.C.D. para justificar la diferenciación dentro de la integral.)

16. Sean $f, g \in \mathcal{L}_1([0, 1])$. Pruebe o proporcione un contraejemplo para las siguientes afirmaciones: f^2, $\sqrt{|f|}$, $|\text{mid}\{-1, f, 1\}|^{1/2}$, $\tan^{-1}(f)$, $\text{máx}\{\ln|f|, 0\}$, fg, $\sqrt{|fg|}$, $\dfrac{|f|}{1+|g|}$, $\sqrt{1+f^2}$ pertenecen a $\mathcal{L}_1([0, 1])$.

17. (La integral de Marcinkiewicz)
Sea $F \subset (a, b)$ cerrado ($a < b$ en $\mathbb{R}$). Para $\alpha > 0$ fija, defina:
$M_\alpha(x) = \int \dfrac{d^\alpha(x, F)}{|x-y|^{1+\alpha}} d\lambda(y)$: donde $d(x, F) =$ distancia de x a F. Pruebe:

    a) Si $x \notin F$, entonces $M_\alpha(x) = \infty$.

b) M_α es finita c.d. en F, $M_\alpha \in \mathcal{L}_1(F)$ y
$\int_{(a,b)} M_\alpha(x) d\lambda \leq \dfrac{2}{\alpha}\lambda((a,b)\setminus F)$.
(Sugerencia: Si $x \in F$, entonces $d(x,F)=0$. Recuerde
$|d(x,F)-d(y,F)| \leq |x-y|$.)

18. Sea $p \in (0,1)$ fija. Pruebe que la bola $B_\varepsilon(0) = \{f \in \mathcal{L}_p(0,1) : ||f||_p \leq \varepsilon\}$ no es convexa.
(Sugerencia: Sea $f = \chi_{(0,\varepsilon^p)}$ $g = \chi_{(\varepsilon^p, 2\varepsilon^p)}$, entonces $f, g \in B_\varepsilon(0)$ pero $\dfrac{1}{2}(f+g) \notin B_\varepsilon(0)$.) ¿Por qué un resultado así no es posible si $p \in [1,\infty)$?

19. Sea (X,S,μ) un espacio de medida. Pruebe: $\mu(X) < \infty \iff \exists \ f \in \mathcal{M}^+(X,S)$ tal que f y $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{L}_1^+(\mu)$.

20. Sea $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ una casi-medida $\sigma-$finita y $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que: $\mathcal{A} \subseteq S$ y $\mu^*|_S : S \to [0,+\infty]$ es aditiva, entonces $S \subseteq \mathcal{A}^*_\mu$.
(Sugerencia: Si $E \in S$ y $\mu^*(E) < \infty$ entonces $E = C \setminus (C \setminus E)$ con $C \in S(\mathcal{A})$ una cubierta medible y $\mu^*(C \setminus E) = 0$.)

21. Sea $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ la medida exterior generada por una casi medida $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$. Sean $E, F \in \mathcal{A}^*$ con $\mu^*(E \cap F) = 0$, entonces $\forall \quad A \subseteq E$ y $B \subseteq F$ se tiene $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.
(Sugerencia: Usa cubiertas medibles.)

22. Suponga que F ó $A \in \mathcal{A}^*$, entonces:
$\mu^*(F) + \mu^*(\mathcal{A}) = \mu^*(F \cap \mathcal{A}) + \mu^*(F \cup \mathcal{A})$. Pruebe con ejemplos que el resultado es falso si F y $A \notin \mathcal{A}^*$.

23. Sea $\rho : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida exterior. Un conjunto $C \subseteq X$ se llama completamente no medible (c.n.m.) con respecto a $D \in \mathcal{A}^\rho$ si $\forall \quad E \subseteq D$ con $E \in \mathcal{A}^\rho$ y $\rho(E) > 0$ se tiene que $E \cap C \notin \mathcal{A}^\rho$. Pruebe:

   a) Si C es c.n.m. con respecto a D, entonces $C \notin \mathcal{A}^\rho$ y $\rho(E) = 0$ $\forall \quad E \in \mathcal{A}^\rho$ con $E \subseteq C$.
   b) Si $C \notin \mathcal{A}^\rho$ y $\rho(F) = 0 \ \forall \quad F \in \mathcal{A}^\rho$ con $F \subseteq C$, entonces existe $D \subseteq \mathcal{A}^\rho$ tal que C es c.n.m. con respecto a D.
   (Sugerencia: Sea D una cubierta medible de C.)
   c) Si C es c.n.m. con respecto a D entonces D es una cubierta medible de C.
   d) Si C es c.n.m. con respecto a D_1 y a D_2 entonces $\rho(D_1 \Delta D_2) = 0$.

24. Sea $\mu : \mathcal{A} \to$ una casi-medida. Defina $\mu' : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ poniendo $\mu'(B) = \text{ínf}\{\mu(A) : B \subset A, A \notin \mathcal{A}\}$. Entonces:

   a) $\mu'|_{\mathcal{A}} = \mu$.
   b) $\mu^* \leq \mu'$.

c) Si μ es $\sigma-$finita, entonces $\mu^* = \mu'$.

d) ¿Es μ $\sigma-$sub-aditiva?

25. *a*) Sea (X, S) un espacio medible y $E \in \mathcal{P}(X) \backslash S$. Pruebe: $S(S \cup \{E\}) = \{(A \cap E) \cup (B - E) : A, B \in S\}$.

    b) Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi medida $\alpha-$finita y $\overline{\mu} : \mathcal{A}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ la medida generada por μ. Suponga que $E \in \mathcal{P}(X) - \mathcal{A}^*$ y defina $\zeta : S(\mathcal{A}^* \cup \{E\}) \to \overline{\mathbb{R}}$ poniendo: $\zeta((A \cap E) \cup (B - E)) = \mu^*(A \cap E) + \mu_*(B - E)$. Pruebe:

    1) ζ está bien definida y $\zeta|_{\mathcal{A}^*} = \overline{\mu}$.
    2) ζ es una medida .

26. Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi medida $\alpha-$finita y μ^* y μ_* las medidas exterior e interior generadas por μ (respectivamente). Pruebe: Para todo $B \subset X$:

    a) $\mu_*(B) = \sup\{\overline{\mu}(E) : E \subset B, E \in \mathcal{A}^*\}$.

    b) $\mu^*(B) = \text{ínf}\{\overline{\mu}(F) : B \subset F, F \in \mathcal{A}^*\}$.

27. Sea $\rho : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida, entonces todo $A \subseteq X$ admite la siguiente descripción: $A = B \cup C$ (disjuntos) con:

    a) $B \in \mathcal{A}^\rho$.

    b) $C \notin \mathcal{A}^\rho$ y c.n.m. con respecto a algún $D \in \mathcal{A}^\rho$.

    c) $B \cap D = \emptyset$.
    (Sugerencia: Sea $\mathcal{Z} = \{E : E \subseteq A, E \in \mathcal{A}^\rho\}$. Aplicar el lema de Zorn a $(\mathcal{Z}, \subseteq)$.) Nota: Algún B, C o D podría ser vacío.

    d) La descomposición es única c.d. (en ρ).

28. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lambda^*(E) > 0$. Pruebe:

    a) $\forall \quad \alpha \in (0, 1)$ $\exists$ un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lambda^*(E \cap I) \geq \alpha\overline{\lambda}(I)$.
    (Sugerencia: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $E \subseteq A$ y $\lambda^*(E) \geq \alpha\overline{\lambda}(A)$. Suponga que $A = \cup_{n=1}^\infty I_n$ (unión disjunta de intervalos abiertos). Algún I_n cumple con el resultado.)

    b) Sea $N \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\exists \quad \alpha \in (0, 1)$ tal que $\forall$ intervalo (a, b), el conjunto $N \cap (a, b)$ puede ser cubierto con una cantidad a lo más numerable de intervalos abiertos de longitud total menor que $\alpha(b - a)$. Pruebe: $\lambda^*(N) = 0$.

    c) Si $\lambda^*(E) > 0$, entonces $E \ominus E = \{x - y : x, y \in E\}$ contiene un intervalo abierto $(-\delta, \delta)$. (Teorema de Steinhaus)
    (Sugerencia: Por a) existe I un intervalo abierto tal que $\lambda^*(E \cap I) \geq \dfrac{9}{10}\overline{\lambda}(I)$. Sea $E_0 = E \cap I_0$. Si E_0 <u>no</u> contiene un intervalo $(-\delta, \delta)$ entonces $\exists \quad \alpha > 0$ suficientemente pequeño tal que E_0 y $E_0 + \alpha$ son ajenos. Examine la contención $(E_0 \cup (E_0 + \alpha)) \subset (I \cup (I + \alpha))$ y las medidas.)

29. Sea $E \in \mathcal{A}^*(0,1)$ con $\lambda(E) > \frac{3}{4}$ y $F \in \mathcal{A}^*(0,\frac{1}{2})$ arbitrario de medida mayor que $\frac{1}{4}$. Pruebe que $\forall \quad \alpha \in [0,\frac{1}{2}]$ existen puntos $x \in E$ y $y \in F$ tales que $|x-y| = \alpha$.
(Sugerencia: Basta probar que $\lambda(E \cap (F+\alpha)) > 0$. Empiece en el caso $\alpha = 0$. Si $\alpha \in [0,\frac{1}{2}]$, $F_\alpha = F + \alpha \subset (\alpha, \alpha + \frac{1}{2}) \subset (0,1)$. Si $\alpha \in [0,\frac{1}{2})$, F_α y E no pueden ser ajenos.)

30. Pruebe que todo intervalo $[a,b]$ contenido en $[0,1]$ contiene a su vez un intervalo abierto (α,β) con $\beta - \alpha \geq \frac{1}{5}(b-a)$ y ajeno al conjunto ternario clásico de Cantor.

31. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo y $S_k = \{x \in (0,1) : x = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x_r}{r!}$ con $x_r \in \{0,1,...,k\}\}$. Pruebe que $\lambda(S_k) = 0$ y concluya que
$\lambda\{x \in (0,1) : x = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{b_r}{r!},\ (b_r) \subset \mathbb{N}$ acotada$\} = 0$.

32. Sea $\hat{C} = \{x \in [0,1] : x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{4^i}$ con $x_i \in \{0,3\}\}$. Pruebe:

    a) $\lambda(\hat{C} + \hat{C}) = 0$.
    (Sugerencia: Considerar: $\frac{1}{2}\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{C}$.)

    b) $\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{C} = [0,\frac{3}{2}]$.
    (Sugerencia: Pruebe: $\frac{2}{3}(\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{C}) = [0,1]$.)

33. Sea $F = \{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{w_r}{4^r} : w_r = 0$ o $1\}$. Pruebe:

    a) F es perfecto, denso en ninguna parte y tiene medida cero.

    b) Si $S_x = \{w + 2x : w \in F\}$ $(x \in \mathbb{R})$, entonces S_x y S_y son en general disjuntos (hay casos especiales, indíquelos) .
    (Sugerencia: Sea $M = \{y \in \mathbb{R} : F \cap S_y \neq \emptyset\}$, note que $M = \frac{1}{2}(F \ominus F)$ y muestre que M tiene medida cero.)

    c) $[0,1]$ puede escribirse como la unión no numerable disjunta de conjuntos no numerables de medida cero.

34. (No-medibles extremos) (Halmos)
Pruebe: Existe $M \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lambda_*(M \cap E) = 0$ y $\lambda^*(M \cap E) = \overline{\lambda}(E)$ $\forall\, E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ estableciendo los siguientes incisos:

    a) Sea ζ un irracional fijo y si $A = \{n + m\zeta : n, m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{n + m\zeta : n$ es par $, m \in \mathbb{Z}\}$ y $C = \{n + m\zeta : n$ es impar$, m \in \zeta\}$ entonces: A, B y C son densos en $\mathbb{R}$, A es un subgrupo numerable de $\mathbb{R}$ bajo la adición, $A = B \cup C$ (unión ajena) y $C = B + 1$.

b) $x \sim_A y \iff x - y \in A$ es una relación de equivalencia. Denote por E_0 el conjunto no-numerable que consiste de exactamente un representante de cada clase, entonces: $E_0 + a$ y $E_0 + a'$ $(a, a' \in A)$ son ajenos si $a \neq a'$ y $\mathbb{R} = \cup\{E_0 + a : a \in A\}$. Concluya que E_0 es no-medible (Similar al conjunto de Vitali.)

c) Si $F_0 \subseteq E_0$ es un boreliano, entonces: $\lambda(F_0) = 0$.
(Sugerencia: Si $\lambda(F_0) > 0$ se sigue del teorema de Steinhaus 28 c) que: $(F_0 \ominus F_0) \cap A \neq \emptyset$ lo cual es imposible.)

d) $\lambda_*(E_0) = 0$ (Use el c) .)

e) Sea $M = E_0 \oplus B$, entonces:

1) $\lambda_*(M) = 0$
$((F \ominus F) \cap C = \emptyset$ para todo boreliano $F \subseteq M)$

2) $\lambda_*(\mathbb{R} \setminus M) = 0$
(Sugerencia: $(\mathbb{R} \setminus M) = M + 1$ y use el c))

f) Concluya el resultado.
(Sugerencia: $\lambda_*(E \setminus M) + \lambda^*(E \cap M) = \lambda^*(E)$)

35. Sea $F \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ con $\overline{\lambda}(F) < \infty$ fijo. Defina $g_F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue: $g_F(x) = \overline{\lambda}(F\Delta(F + x))$. Pruebe que g_F es uniformemente continua siguiendo los siguientes pasos:

a) Sean K compacto y A abierto tales que $K \subseteq F \subseteq A$ y $\overline{\lambda}(A \setminus C) < \dfrac{\varepsilon}{4}$ $(\varepsilon > 0$ dada) (Regularidad de $\overline{\lambda}$). Use la compacidad de K para obtener $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $K + x \subseteq A \quad \forall \quad x \in (-\delta, \delta)$.

b) Pruebe: si $|x - y| < \delta$, entonces $\overline{\lambda}((K + x)\Delta(K + y)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
(Sugerencia: $\overline{\lambda}((K + x)\Delta(K + y)) = \overline{\lambda}((K + x - y) \setminus K) + \overline{\lambda}((K + y - x) \setminus K)$.)

c) Concluya que $|g_F(x) - g_F(y)| \leq 2\overline{\lambda}(F \setminus K) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

36. Hipótesis y notación como en el anterior. Sea $F \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ con $\overline{\lambda}(F) < \infty$ y $g_{E,F}(x) = \overline{\lambda}(E\Delta(F + x))$.

a) Pruebe: $g_{E,F}$ es uniformemente continua.
(Sugerencia: $|g_{E,F}(x) - g_{E,F}(y)| \leq g_F(y - x)$)

b) Si $f_{E,F}(x) = \overline{\lambda}(E \cap (F + x))$ entonces: $|f_{E,F}(x) - f_{E,F}(y)| \leq g_F(y - x)$.

37. Pruebe las siguientes afirmaciones sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) Si $V \subseteq [0, 1]$ es un conjunto no-medible de Vitali, entonces:
$(V - V) \cap \mathbb{Q} = \{0\}$ pero $\mathbb{R} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} V + q$.

b) Si $F \subseteq \mathbb{R}$ es de primera categoría, entonces: $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus F) \oplus (\mathbb{R} \setminus F)$.

c) Existen $E, F \subseteq \mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero y de primera categoría tales que: $\mathbb{R} = E \oplus F$.
(Sugerencia: $E = \cup_{n\in\mathbb{Z}} C + n$ y $F = C$ donde C es el conjunto ternario de Cantor.)

d) Existe $G \subseteq \mathbb{R}$ denso en ninguna parte y que no es Lebesgue medible.
(Sugerencia: Sea $\hat{C}$ un conjunto tipo Cantor de medida positiva, $\hat{C}$ contiene algún no-medible.)

e) Existe $H \subseteq \mathbb{R}$ Borel medible, de segunda categoría y de medida cero.
(Sugerencia: Sea
$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ...\}$ una enumeración. Sea $H = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} (r_n - \frac{1}{2^{n+m}}, r_n + \frac{1}{2^{n+m}})$. Pruebe que $\mathbb{R} \setminus H$ es de primera categoría y use el Teorema de Baire.)

38. (W. Rudin) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intevalo. Pruebe:

a) I contiene un abierto $F(I)$ tal que $\lambda(F(I)) = \frac{1}{2}\lambda(I)$ y
$F(I) \cap J = \emptyset \quad \forall \quad J \subset I$, J intervalo abierto.
(Sugerencia: Sea $C \subset I$ un conjunto generalizado de Cantor tal que $\lambda(C) = \frac{1}{2}\lambda(I)$. Sea $F(I) = I^o - C$.)

b) I contiene un subconjunto de N de medida 0 tal que $I - N$ es la unión numerable de conjuntos que son densos en ninguna parte.
(Sugerencia: Considere a F como operador $(I \to F(I))$ y aplíquelo repetidamente.)

39. Construya un conjunto F de primera categoría y de tipo $\mathcal{F}_\sigma$ con $\lambda(F) < \infty$ tal que $0 < \lambda(F \cap I) < \lambda(I) \quad \forall \quad I \subset \mathbb{R}$ intervalo.
(Sugerencia: Sea $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de todos los intervalos abiertos con centro racional y radio racional. Defina inductivamente una sucesión ajena de cerrados y densos en ninguna parte (D_k) de medida positiva tales que:

a) $D_{2k-1} \cup D_{2k} \subset I_k$

b) $\sum_j \lambda(D_j) < \infty$.
Ahora tome $F = \cup_{k=1}^{\infty} D_{2k}$.)

40. Sea $P \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y perfecto (i.e. $P = P'$). Pruebe que P contiene un subconjunto no vacío y perfecto de medida cero.

41. Construya un subconjunto abierto $A \subseteq [0, 1]$ tal que la medida de Lebesgue de la frontera de A sea positiva (i.e. $\lambda(\partial(A)) > 0$). (NOTA: $f = \chi_A$ no es Riemann-integrable).
(Sugerencia: Considere un conjunto tipo Cantor de medida positiva.)

42. Sea $B \subseteq R$ una base de Hamel de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Pruebe:

a) $\lambda^*(B) = 0$

(Sugerencia: Sea $b_0 \in B$ fija y $B_0 = \{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{b}{b_0}, b \in B\}$. Si $\lambda^*(B) > 0$ entonces $\lambda^*(B_0) > 0$ por lo que existen $b_1 \neq b_2$ tal que $b_1 - b_2 = q \in \mathbb{Q}$ (Steinhaus). Así pues, $b_1 = b_2 + qb_0$ lo cual viola la independencia de la base.)

b) Sea $b_0 \in B$ fijo y $\hat{B} = \langle B \setminus \{b_0\} \rangle$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ generado por $B \setminus \{b_0\}$, entonces $\hat{B} \notin \mathcal{A}^*$.

(Sugerencia: Supongamos que $\hat{B} \in \mathcal{A}^*$, entonces $\overline{\lambda}(\hat{B}) > 0$, pues $\mathbb{R} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} \hat{B} + qb$. Sea $\hat{B_0} = \{\dfrac{x}{b_0} : x \in \hat{B}\}$. Entonces $\hat{B_0} \in \mathcal{A}^*$ y $\overline{\lambda}(\hat{B_0}) > 0$ también; por lo que existen $x \neq y \in \hat{B_0}$ tales que $x - y = q \in \mathbb{Q}$. Entonces $b_0 x, b_0 y \in \hat{B}$ y $b_0 x = b_0 y + b_0 q$ lo cual contradice la definición de $\hat{B}$.)

c) Existe N un subconjunto propio de $\mathbb{R}$ tal que $\forall \quad y \in \mathbb{R}$ dado, la familia de traslaciones $\{N + ny : n \in \mathbb{N}\}$ es finita.

(Sugerencia: Sea $N = \{x \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i : \alpha_i \in \mathbb{Z}, b_i \in B$ y $n \in \mathbb{N}\}$. Sea $y \in \mathbb{N}, y \neq 0$. Entonces $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Sea $\alpha =$m.c.d.$\{\alpha_i\}$. Como αy y $x + \alpha y \in \mathbb{N} \ \forall \quad x \in \mathbb{N}$, entonces toda $x \in \mathbb{N}$ se puede escribir como $(x - \alpha y) + \alpha y$ con $(x - \alpha y) \in N$ es decir, $N + \alpha y = N$. Así pues, sólo $N, N + y, ..., N + (\alpha - 1)y$ podrían ser admitidos.)

d) Existe T un subconjunto propio de $\mathbb{R}$ tal que el conjunto de traslaciones $\{T + t : t \in \mathbb{R}\}$ es a lo sumo numerable.

(Sugerencia: Sea $T = \{x \in \mathbb{R}$: la descripción de x no requiere de $b_0 \in B\}$. Claramente $T + t = T$ si $t \in T$. Si $t = t_0 + qb_0$, $t_0 \in \mathbb{Q}$ entonces: $T + t = T + qb_0$, por lo que los únicos traslados de T diferentes de T son de la forma $T + qb_0$.)

e) Decimos que un número real diferente de cero tiene <u>peso k</u> si su expresión en términos de B requiere de k de sus elementos. Denote por X_n al conjunto de números reales diferentes de cero con peso $\leq 2^n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Pruebe que $X_{n+1} = X_n \ominus X_n \quad \forall \quad n$ y concluya que para alguna n, X_n es medible pero X_{n+1} ya no lo es.

(Sugerencia: Observe que X_n no contiene intervalos, ahora use el Teorema de Steinhaus.)

(NOTA: La existencia de una base de Hamel equivale al AXIOMA DE ELECCIÓN.)

43. Sea $I = [0, 1]$, $A \subset I$ no medible y $B = I - A$. Pruebe:
$\underline{R}\int_a^b \chi_A(t)dt + \underline{R}\int_a^b \chi_B(t)dt < 1 < \overline{R}\int_a^b \chi_A(t)dt + \overline{R}\int_a^b \chi_B(t)dt$ donde $\underline{R}\int$ y $\overline{R}\int$ denotan las integrales inferior y superior de Riemann. Además, $\underline{R}\int_a^b \chi_C(t)dt = \overline{R}\int_a^b \chi_C(t)dt \iff \lambda(\partial(C)) = 0$.
(Sugerencia: Pruebe: $\lambda_*(A) + \lambda_*(B) < 1 < \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ o bien, si h y g son la envoltura superior e inferior de χ_A respectivamente, entonces: $h = \chi_{\overline{A}}$ y $g = \chi_{A^\circ}$.)

(NOTA: Un conjunto acotado C se le llama Jordan - medible si χ_C es Riemann integrable. De acuerdo con lo que se enuncia en el ejercico anterior, C es Jordan - medible si y sólo si $\lambda(\partial(C)) = 0$.)

44. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función Riemann - integrable y $E = \{x \in \mathbb{R} : f^{-1}(\{x\})$ no es Jordan - medible$\}$. Pruebe que E es finito o numerable. (Sugerencia: Sea $D = \{t \in [0,1] : f$ es discontinua en $t\}$. Por hipótesis, $\lambda(D) = 0$. Note que si $r \neq s$, entonces: $\partial(f^{-1}(\{r\})) \cap \partial(f^{-1}(\{s\})) \subset D$ y $\sum_{x\in E} \lambda(\partial(f^{-1}(\{x\})) \leq 1$.)

45. Pruebe que $g(x) = \lim_{m,n\to\infty} \dfrac{1}{1+n\sin(m!\pi x)} \in \mathcal{L}_1([0,1])$ pero no es Riemann - integrable.

46. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ x^3 \sin\left(\dfrac{1}{|x|^{5/2}}\right) & si\ x \neq 0 \end{cases}$. Entonces, $|f'(x)|$ es acotada, no es Riemann - integrable pero sí Lebesgue - integrable.

47. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = d(x,C)$ donde C es el conjunto ternario clásico de Cantor. Pruebe:

    a) $\int_{[0,1]} f(x)dx = \dfrac{1}{28}$.
    b) $f(x)^{-1/3} \in \mathcal{L}_1([0,1])$ (si $x \in C$, convenimos en poner $f(x)^{-1/3} = 0$).

48. Sea $M \notin \mathcal{A}^*(0,1)$ y defina $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \notin M \\ x+1 & si\ x \in M \end{cases}$. Pruebe: $f(E)$ tiene medida cero $\forall \quad E \subset (0,1)$ de medida cero, pero $f(E)$ podría no ser medible aún si E lo es.

49. Sea $\{r_1, r_2, ...\}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ y sea $f(x) = \sum_{\{n:x>r_n\}} 2^{-n}$. Halle $\int g d\lambda_f \quad \forall\ g : (0,1) \to \mathbb{R}$ continua. (Solución: $\sum_{n=1}^{\infty} g(r_n) 2^{-n}$.)

50. Sea (X,S,μ) un espacio de medida y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en S y sean $A_* = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, $A^* = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$. Pruebe:

    a) $\chi_{A_n} \to 0$ (en μ) $\iff \mu(A_n) \to 0$.
    b) $\chi_{A_n} \to 0$ c.d. $\iff \mu(A^*) = 0$.
    c) $\chi_{A_n} \to \chi_A$ c.d. $\iff A$, A^* y A_* difieren entre si por $\mu-$nulos.
    d) $\chi_{A_n} \to f$ (en μ) $\iff f = \chi_{A^*}$ c.d.
    e) Si además (X,S,μ) es un espacio de probabilidad y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ son eventos independientes, entonces: $\chi_{A_n} \to 0$ c.d. $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$.
    (Sugerencia: Usar las dos partes del lema de Borel-Cantelli.)

51. Pruebe $f_n \to f$ (en μ) $\iff$ toda subsucesión de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ admite a su vez otra subsucesión que converge a f c.d (rel. μ).

52. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones $S-$medibles. Supongamos que $f_n \to f$ (en μ) y que $h = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$. Pruebe que $f = h$ c.d.
(Sugerencia: Pruebe: $\forall \varepsilon > 0 \quad \{x \in X : |h - f|(x) > \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : \underline{\lim}_{n\to\infty} |f_n - f|(x) > \varepsilon\} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \{x \in X : |f_n - f|(x) > \varepsilon\}$)

53. *a*) Sea (X, S, μ) un espacio de medida. Supongamos que $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n=1}^{\infty}$ es monótona y $f_n \to f$ (en μ), entonces $f_n \to f$ c.d.
    b) Pruebe que f podría ser distinto de $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ si la sucesión no es monótona.
    (Sugerencia: $X = [0, 1)$, $\quad S = \mathbb{B}_{[0,1)}$, $\quad \mu =$medida de Lebesgue. Sea $f_1 = \chi_{[0,1/2)}$, $f_2 = \chi_{[1/2,1)}$, $f_3 = \chi_{[0,1/3)}, \ldots$)

54. Sea $f \in \mathcal{L}_1^+([0, 1])$ y sea $q \in (0, 1)$ <u>fijo</u>. Si $S_q = \{E \in \mathbb{B}_{[0,1]} : \lambda(E) \geq q\}$, entonces $\inf_{E\in S_q} \{\int_E f d\lambda\} > 0$.
(Sugerencia: Suponga que $\exists\ q \in (0, 1)$ tal que el ínfimo es cero. Sea $(E_{q(n)})_{n=1}^{\infty} \subseteq S_q$ tal que $\int_{E_{q(n)}} f d\lambda < \dfrac{1}{2^n}$. Considere $E^* = \overline{\lim}_{n\to\infty} E_{q(n)}$. Concluya que $\int_{E^*} f d\lambda = 0$, pero $\lambda(E) \geq q$.)

55. (Equivalencia de Khintchine)
Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones $S-$medibles. Decimos que (f_n) y (g_n) son equivalentes, denotado: $(f_n) \sim (g_n)$ si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x \in: f_n(x) \neq g_n(x)\} < \infty$. Pruebe: si $(f_n) \sim (g_n)$ entonces:

    a) $\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} \{x \in X : f_n(x) \neq g_n(x)\}) = 0$.
    b) $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n - g_n)$ converge c.d.
    c) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge c.d. $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge c.d.

56. Hipótesis y notación como en el anterior.

    a) Si $f_n \to f$ c.d. y $(f_n) \sim (g_n)$ no implica que $g_n \to f$ c.d.
    (Sugerencia: Sea $X = [0, \infty)$, $S = \mathbb{B}_{[0,\infty)}$ y $\mu = \lambda$. Sea $f_n = \chi_{[0,\infty)\setminus[n,n+1)}$ entonces $f_n \to \lambda$ c.d. pero $f_n \nrightarrow 1$ c.d. Sea $c_n = \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ y $g_n = \chi_{[0,\infty)\setminus[n,n+c_n)}$, entonces $(f_n) \sim (g_n)$ y $g_n \to 1$ c.d.)
    b) Pruebe: $f_n \to f$ (en μ) y $(f_n) \sim (g_n) \Rightarrow g_n \to f$ (en μ).

57. (E. H. Lieb)
Supongamos que $f, f_n \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y que $f_n \to f$ c.d., entonces:

    a) $\lim_{n\to\infty} |||f_n - f||_1 - ||f_n||_1 - ||f||_1| = 0$
    (Sugerencia: $\forall\ s, t \in \mathbb{R}$: $||s - t| - |s| - |t|| \leq 2|t|$)

b) Si además $f_n \geq 0$ c.d. entonces:
$\int f d\mu = \text{lím}_{n\to\infty} \int f_n d\mu - \int |f_n - f| d\mu \leq \underline{\text{lím}}_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

58. $N \subset [a,b]$ es $\overline{\lambda}-$nulo $\iff \exists\ (f_n)_1^\infty \subseteq \mathcal{L}_1([a,b])$ no-decreciente tal que $f_n(x) \to \infty\ \forall\ x \in \mathbb{N}$ y $(\int_{[a,b]} f_n d\overline{\lambda})_{n=1}^\infty$ converge en $\mathbb{R}$.
(Sugerencia: $\Rightarrow$) Tome $f_n = n\chi_N$. $\Leftarrow$) Note que $(\int_{[a,b]} f_n d\overline{\lambda})_{n=1}^\infty$ es acotada.)

59. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones $S-$medibles tal que: $|f_n(x)| < \infty$ c.d. (rel. μ). Pruebe: $\exists$ una sucesión de números reales positivos tal que $\dfrac{f_n}{c_n} \to 0$ c.d. (rel. μ).
(Sugerencia: Sea $c_n > 0$ tal que $\mu(\{x \in X : \left|\dfrac{f_n(x)}{c_n}\right| > \dfrac{1}{n}\}) < \dfrac{1}{2^n}$ y aplique el lema de Borel-Cantelli.)

60. Pruebe: $\dfrac{d}{dx}(\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}d\lambda(t))|_{x=1} = \text{lím}_{n\to\infty}\{\log n - \sum_{r=1}^n \dfrac{1}{r}\}$ (el valor del límite anterior se conoce como la constante de Euler-Mascheroni).
(Sugerencia: Justifique $\int_0^\infty e^{-t}\log t d\lambda = \text{lím}_{n\to\infty} \int_0^n (1-\dfrac{t}{n})^n \log t dt$ e integre por partes.)

61. Pruebe: Si $||f_n - f||_p \to 0\ (n \to \infty)\ (f_n, f \in \mathcal{L}_p(\mu))$, entonces $\int f_n g d\mu \to \int f g d\mu \quad \forall \quad g \in \mathcal{L}_q(\mu)$ con q el exponente conjugado de p. ¿Es cierto el recíproco?

62. Sea (X, S, μ) un espacio de medida finita y $f \in \overline{\mathcal{M}}(X, S)$ dada. Pruebe:

    a) $\text{lím}_{n\to\infty} \int |f|^n d\mu < \infty \iff \mu\{x \in X : |f| > 1\} = 0$. En cuyo caso el límite anterior es igual a $\mu\{x \in X : |f| = 1\}$.

    b) Si $\int f^n d\mu = c \quad \forall \quad n = 2, 3, 4, ...$ entonces $f = \chi_A$ c.d. para alguna $A \in S$.

63. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no-negativa tal que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda < \infty$. ¿Es cierto que $\text{lím}_{|x|\to\infty} f(x) = 0$? ¿Si f es continua? Justifique sus respuestas.

64. Pruebe el lema de Fatou con parámetro continuo.
(NOTA: Así fue probado originalmente en 1906.)

65. Pruebe: $\forall \quad g \in \mathcal{C}([a,b])$, $\text{lím}_{n\to\infty}, \int_a^b |\sin(nx)| g(x) d\lambda = \dfrac{1}{\pi}\int_a^b g(x) d\lambda$. (L. Fejer)
(Sugerencia: Aproxime g con funciones escalonadas.)

66. Sea $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathcal{S}_{\mathbb{R}})$. Suponga que $\sum_{-\infty}^\infty f(x+n)$ pertenece a $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, entonces $f = 0$ c.d. Por otro lado, si $g(x) = \sum_{-\infty}^\infty f(2^{|n|}x) < \infty$ c.d. y $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, entonces $\int g d\lambda = 3\int f d\lambda$.

67. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que $F(x) = \int_0^x f(t)d\lambda$ es acotada en $\mathbb{R}$. Pruebe:

   a) $\lim_{r\to\infty} \int_{[a,b]} f(rt)d\lambda = 0 \quad \forall \quad a < b$ en $\mathbb{R}$.

   b) Si $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, entonces $\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)f(rt)d\lambda = 0$.

   c) Obtenga el lema de Riemann-Lebesgue, a saber: Si $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, entonces $\lim_{r\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]} \varphi(t) \begin{Bmatrix} \sin rt \\ \cos rt \end{Bmatrix} d\lambda = 0$.

   d) Calcule $\lim_{n\to\infty} \int (-1)^{[nt]}\varphi(t)d\lambda$, donde $[x]$ = parte entera de x.

68. Sea $(f_n) \subset \mathcal{M}$ una sucesión de funciones tal que $f_n \to f$ en medida. Suponga que $\forall \quad \varepsilon > 0$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \infty$. Pruebe que $f_n \to f$ casi uniformemente.
(Sugerencia: Si $A_n(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, entonces se sigue que $\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\varepsilon) = 0$.)

69. Use el teorema de Egorov para probar el teorema de la convergencia dominada suponiendo que $\mu(X) < \infty$ y que $\{||f_n||_1 : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

70. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ medible tal que $\int_{[a,b]} f(x)g(x)d\lambda = 0$ para toda $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea Riemann-integrable.

   a) Pruebe que $\lambda(\overline{\{x \in [a,b] : |f(x)| > \varepsilon\}}) = 0 \; \forall \; \varepsilon > 0$.

   b) ¿Es cierto el inciso anterior si ε se reemplaza por 0 ?
   (Sugerencia: Basta suponer que f es no negativa. Sea $C_\varepsilon = \overline{\{x : f(x) > \varepsilon\}}$ y $C_\varepsilon(r) = \{x : d(x, C_\varepsilon) \leq r\} \; \forall \; r > 0$. Note que cada $C_\varepsilon(r)$ es cerrado, $C(\varepsilon) = \cap_{r>0} C_r(\varepsilon)$ y $\partial(C_\varepsilon(r)) = \{x : d(x, C_\varepsilon) = r\}$. Más aún, $\exists$ una sucesión (r_n) tal que $r_n \to 0$ y $\lambda(C_\varepsilon(r_n)) = 0 \; \forall \; n$. Sea $\varphi_n = \chi_{C(r_n)}$ entonces φ_n es Riemann-integrable en $[a,b]$ y $\varphi_n \to \chi_{C_\varepsilon}$. El resto es ya inmediato usando la desigualdad de Tchebyshev.)

71. Sea $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$. Pruebe: $\sum_{j=0}^{n-1} |\int_{[x_j,x_{j+1}]} f d\lambda| \longrightarrow \int_{[a,b]} |f| d\lambda$ si la norma de la partición $\mathcal{P} = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ tiende a cero.
(Sugerencia: Empiece con f continua y aproxime en el caso general.)

72. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(f_n) \subset \mathcal{M}(X, S)$ una sucesión de funciones. Suponga que $f_n \to f \in \mathcal{M}(X, S)$ en medida.

   a) Pruebe que: $\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X : f_n(x) \leq t\}$
   $= \mu\{x \in X : f(x) \leq t\} \; \forall \; t$ tal que $\mu\{x \in X : f(x) = t\} = 0 \quad ...(*)$.
   (NOTA: La convergencia descrita en $(*)$ se llama convergencia en distribución.)
   (Sugerencia: Pruebe la siguiente desigualdad $\forall \; \varepsilon > 0 : \mu\{f \leq t - \varepsilon\} - \mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \leq \mu\{f_n \leq t\} \leq \mu\{f \leq t + \varepsilon\} + \mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$. El resto se sigue tomando límites inferior y superior y luego haciendo tender ε a cero.)

b) Muestre que el recíproco del inciso anterior es falso.
(Sugerencia: Sea $X = [0,1]$, $f = \chi_{[1/2,1]}$ y $f_n = \chi_{[0,1/2]}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.)

73. Pruebe la siguiente versión continua del teorema de D.F. Egorov. Si $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y $\varphi(x) = \lim_{t\to 0} f(x,t)$ existe y es finito $\forall\ E \subset [0,1]$ medible, entonces $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $F \subset E$ cerrado tal que $\lambda(E - F) < \varepsilon$ y $f(x,t) \to \varphi(x)$ $(t \to 0)$ uniformemente en F.
(Sugerencia: Considere $E_{\varepsilon,\zeta} = \{x \in E : |f(x,t) - \varphi(x)| \leq \varepsilon\ \forall\ t < \zeta\}$ con $0 < \zeta < 1$. Muestre que es medible.)

74. Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{L}_1(\lambda)$ tal que $\forall a < b$ en $\mathbb{R}$ y $\forall\ M > 0$ $\overline{\lambda}([x \in (a,b) : f(x) \geq M\}) > 0$.
(Sugerencia: Sea $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Defina $f_k(x) = \begin{cases} (x - r_k)^{-1/2} & si\ x \in (r_k, r_{k+1}) \\ 0 & si\ x \notin (r_k, r_{k+1}) \end{cases}$
y sea $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, entonces $\int f d\lambda = 2$ y $\forall M > 0\ \exists\ q < r$ en $\mathbb{Q}$ con $(q,r) \subseteq (a,b)$ con $f(x) \geq M \quad \forall\ x \in (q,r)$.)

75. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Pruebe: f satisface una condición de Lipschitz en $[a,b]$ $\iff$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \zeta = \zeta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\{(a_i,b_i)]_{i=1}^{n}$ es una colección finita de subintervalor abiertos <u>no necesariamente ajenos</u> tal que $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \zeta$ entonces: $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.
(NOTA: Compare con la definición de continuidad absoluta.)

76. (La indicatriz de Banach)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $A_y = \{x \in [a,b] : f(x) = y\}$. Defina $N_f : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}$ poniendo $N_f(y) = \#(A_y)$. Pruebe: $\int_{\mathbb{R}} N_f d\lambda = V_a^b(f)$
(En particular, si f es de variación acotada, N_f es finita c.d.).
(Sugerencia: Sea $(\mathcal{P}_n)$ una sucesión creciente de particiones de $[a,b]$ tal que las normas tienden a cero. Sea $N_n = \sum_{k=1}^{m_n} \chi_{B_{n,k}}$ donde $B_{n,k} = f^{-1}([x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}])$ y $\mathcal{P}_n = (a = x_0^{(n)} < \dots < x_{m_n}^{(n)} = b)$. Pruebe que $N_n \to N_f$ c.d. y use el T.C.M.)

77. ¿Existe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tal que no sea de variación acotada y sin embargo N_f sea finita salvo en un punto? ¿En ningún punto?

78. Sea $F \in AC([a,b])$. Pruebe:

a) $V_c^b(F) = \int_{[a,b]} |F'| d\lambda$.
(Sugerencia: Puede suponer que F' existe c.d., pertence a $\mathcal{L}_1([a,b])$ y $F(x) = \int_{[a,x]} F' d\lambda + F(a)$. Use el ejercicio 70.)

b) $P_a^b(F) = \int_{[a,b]} (F')^+ d\lambda$ y $N_a^b(F) = \int_{[a,b]} (F')^- d\lambda$.
(Sugerencia: $x^+ = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$. Use el inciso a) y el ejercicio 71.)
(NOTA: $P_a^b(F)$ y $N_a^b(F)$ denotan la <u>variación positiva y negativa</u> de F, respectivamente.)

79. Sea $f \in BV([a,b])$ continua tal que $f \in AC([\alpha,\beta]) \quad \forall\ \alpha < \beta$ en (a,b). Pruebe que $f \in AC([a,b])$.
(Sugerencia: Use la propiedad (N) de Luzin.)

80. Sean f, g funciones absolutamente continuas en sus dominios ($f : [c,d] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to [c,d]$). Pruebe: $f \circ g \in AC([a,b]) \iff f \circ g \in BV([a,b])$.
(Sugerencia: Use la propiedad (N) de Luzin.)
(NOTA: El resultado anterior es de G.M. Fichtenholtz.)

81. Sea $f(x) = x^2 \left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$, $f(0) = 0$ y $g(x) = \sqrt{x}$ (definidas en $[0,1]$). Entonces$f, g \in AC([0,1])$, $f \circ g \in AC([0,1])$ pero $g \circ f \notin AC([0,1])$.

82. Si f, g son absolutamente continuas y g es monótona, entonces $f \circ g$ es absolutamente continua.

83. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y diferenciable con derivada acotada y mayor que cero. Pruebe que $f(E)$ es medible $\forall\ E \subset \mathbb{R}$ medible.
(Sugerencia: Pruebe que f tiene la propiedad (N) de Luzin.)

84. Si $f \in AC([a,b])$, entonces $|f|^p \in AC([a,b]) \quad \forall\ p \in [1,\infty)$. Suponga ahora que $\min\{|f(x)| : x \in [a,b]\} > 0$. ¿Se sigue que $|f|^p \in AC([a,b])$ si $p \in (-\infty, 1)$?

85. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : E \to \mathbb{R}^m$ tal que $\forall\ x \in E$ y $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \zeta = \zeta(x,\varepsilon) > 0$ tal que $||f(x) - f(y)|| < \varepsilon||x - y||\ \forall\ y \in E$ con $||x - y|| < \zeta$. Pruebe que $\lambda^{(n)}(f(E)) = 0$.
(Sugerencia: Escriba $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n = \{x \in E : \zeta(x,\varepsilon) > 1/n\}$.)

86. (La función maximal de Hardy-Littlewood)
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable. Para cada intervalo abierto acotado $I \subset \mathbb{R}$ y $x \in I$ fijos, definimos: $m_f(x,I) = \dfrac{1}{\lambda(I)} \int_I |f| d\lambda$ y $M_f(x,I) = \sup_I\{m_f(x,I) : x \in I\}$. Pruebe:

   a) $M_f = M_{|f|}$ y $M_{f+g} \leq M_f + M_g$.
   b) M_f es semicontinua superiormente (en consecuencia es Borel medible).
   c) Si $\{I\}_{I \in J}$ es cualquier familia <u>finita</u> de intervalos abiertos acotados, existe una subfamilia $\{I_1, I_2, ..., I_r\}$ consistente de intervalos <u>ajenos</u> tal que: $\lambda(\cup_{I \in J} I) \leq 2 \sum_{i=1}^{r} \lambda(I_i)$.
   (Sugerencia: Sea $l_0 = \max\{\lambda(I) : I \in J\}$ y sea I_i un intervalo de J con $l_0 = \lambda(I_1)$. Sea $J_1 = \{I \in l : I \cap I_1 = \emptyset\}$, $l_1 = \max\{\lambda(I) : I \in J_1\}$ y sea $I_2 \in J_1$ tal que $\lambda(I_2) = l_1$. Continuando de este modo, hallamos un último $r \in \mathbb{N}$ tal que: $J_{r-1} = \{I \in J : I \cap (I_1 \cup ... \cup I_{r-1}) = \emptyset\}$ no es vacía. Sea $I_r \in J$ tal que $\lambda(I_r) = \max\{\lambda(I) : I \in J_r\}$. Si $\tilde{I}$ denota el intervalo abierto con el mismo centro que I pero del <u>doble</u> de su longitud, pruebe que: $\cup_{I \in J} I \subset \cup_{i=1}^{r} \tilde{I}_i$).

d) $\lambda\{x \in \mathbb{R} : M_f(x) > a\} \leq \dfrac{2}{a} \int |f| d\lambda \quad \forall\, a > 0$ (Desigualdad maximal). (Sugerencia: Si $K \subset \{M_f > a\}$ es compacto, cúbralo con cierta cubierta abierta finita y utilice el inciso c).)

e) $t\lambda\{x \in \mathbb{R} : M_f(x) > t\} \in \mathcal{L}_1(\lambda)$, en particular $M_f < \infty$ c.d. (e) dice que M_f es de "tipo débil $\mathcal{L}_1$").
(NOTA: Si $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ no necesariamente se sigue que $M_f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$, sin embargo si $f \in \mathcal{L}_p(\lambda)$, entonces $||M_f||_p \leq K||f||_p$ con $K > 0$ constante absoluta $(p > 1)$.)

87. (Los teoremas de Lebesgue)

a) Sea $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$, entonces: $\lim_{\lambda(I)\to 0} \dfrac{1}{\lambda(I)} \int_I f(t) d\lambda = f(x)$ c.d. $x \in \mathbb{R}$ donde I denota un intervalo que contiene a x.
(Sugerencia: Si f es continua, el resultado es inmediato. En el caso general, halle una sucesión de funciones continuas $(f_n) \subset \mathcal{L}_1(\lambda)$ tales que $||f - f_n||_1 \to 0$. Si denotamos $F(I) = \dfrac{1}{\lambda(I)} \int_I f(t) d\lambda$ y análogamente con $F_n(I)$, entonces: $\overline{\lim}_{\lambda(I)\to 0}|F(I) - f(x)| \leq \overline{\lim}_{\lambda(I)\to 0}(|F(I) - F_n(I)| + |F_n(I) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|)$. El segundo término no presenta problema, para el primero observe que $|F(I) - F_n(I)| \leq M_{f-f_n}(x)$. Para $\varepsilon > 0$ denote: $E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : \overline{\lim}_{\lambda(I)\to 0}|F(I) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ y observe que E_ε está contenido en: $\{x \in \mathbb{R} : M_{f-f_n}(x) \geq \varepsilon/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}$. Aplique la desigualdad maximal y la de Tchebyshev para concluir que $\lambda(E_\varepsilon) = 0$. Pase al límite con ε para concluir el resultado.)

b) Pruebe: Si $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ entonces: $\lim_{\lambda(I)\to 0} \dfrac{1}{\lambda(I)} \int_I |f(t) - f(x)| d\lambda(t) = 0$ c.d. $x \in \mathbb{R}$.
(Sugerencia: Por el inciso a), para cada $r \in \mathbb{Q}$ el conjunto: $N_r = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{\lambda(I)\to 0} \dfrac{1}{\lambda(I)} \int_I |f(t) - r| d\lambda(t) = |f(x) - r|\}$ tiene medida cero. Sea $N = \{x \in \mathbb{R} : x \in N_r \text{ o } |f(x)| = \infty\}$, entonces N tiene medida cero y fuera de él, el resultado se sigue.)

c) Si $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, entonces c.d. $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{\lambda(I)\to 0} \dfrac{\lambda(E \cap I)}{\lambda(I)} = \begin{cases} 1 & si\ x \in E \\ 0 & si\ x \notin E \end{cases}$
.

88. (La integral de Steklov)
Para $\varphi \in \mathcal{L}_1([a, b])$ ponga $\varphi(x) = 0 \quad \forall \quad x \notin [a, b]$ y defina $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue: $\varphi_h(x) = \dfrac{1}{2h} \int_{[x-h,x+h]} \varphi(t) d\lambda$. Pruebe:

a) $\int_{[a,b]} |\varphi_h(x)| d\lambda \leq \int_{[a,b]} |\varphi(x)| d\lambda$.

b) Si $\varphi \in \mathcal{L}_p([a,b])$, entonces $\varphi_h \in \mathcal{L}_p([a,b])$ y $||\varphi_h||_p \leq ||\varphi||_p$ $(p > 1)$. (Sugerencia: Note primero que φ_h es continua. Para a) empiece suponiendo que $\varphi \geq 0$ y entonces: $2h \int_{[a,b]} \varphi_h(x)d\lambda = \int_{[a,b]} d\lambda \int_{[-h,h]} \varphi(x+t)d\lambda = \int_{[-h,h]} d\lambda \int_{[a,b]} \varphi(x+t)d\lambda \leq \int_{[-h,h]} d\lambda \int_{[a,b]} \varphi(x)d\lambda$. El caso φ general se sigue de lo ya considerado. Para b) use la desigualdad de Hölder y el inciso anterior.)

89. Notación como en en ejercicio anterior. Si $p \geq 1$ y $\varphi \in \mathcal{L}_p([a,b])$ entonces: $\lim_{h\to 0} \int |\varphi_h(x) - \varphi(x)|^p d\lambda = 0$.
(Sugerencia: Empiece con el caso $p = 1$: Use el hecho de que casi todo punto es un punto de Lebesgue de φ para obtener $\varphi_h(x) \to \varphi(x)$ c.d. y concluya el caso usando el T.C.D. El caso $p > 1$ es ya inmediato.)
(NOTA: La integral de Steklov es usada para caracterizar la compacidad de subconjuntos de $\mathcal{L}_p$. El caso $p = 2$ fue introducido inicialmente por Kolmogorov.)

90. Construya $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua que no sea monótona en algún intervalo.
(Sugerencia: Sea F como en el ejercicio 39 y sea $f(x) = \int_{[0,x]} (\chi_F - \chi_{F^c})d\lambda$.)

91. Describa a λ_g (la medida de Lebesgue-Stieltjes) si:

   a) $g(x) = \arctan x$ (en $\mathbb{R}$).
   b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} d\lambda$ (en $\mathbb{R}$).
   c) $g(x) =$ la función singular de Lebesgue (en $[0,1]$) con $g(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$.

92. a) Sea $f : (-1/2, 1/2) \to (-1,1)$ dada por $f(x) = \sin 2\pi x$. Defina: $v : \mathbb{B}_{(-1,1)} \to \mathbb{R}$ poniendo $v(B) = \lambda(f^{-1}(B))$. Muestre que $v << \lambda$ y halle $\dfrac{dv}{d\lambda}$.
   (Solución: $\dfrac{dv}{d\lambda}(t) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$)
   b) Igual que en a) pero considere af con $a > 0$.

93. Sea $N \subset [a,b]$ un subconjunto de medida cero. Pruebe que existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua no decreciente tal que $\varphi'(x) = \infty \quad \forall\, x \in N$.
(Sugerencia: Para cada n halle G_n abierto acotado tal que $N \subseteq G_n$ con $\lambda(G_n) < 2^{-n}$, sea $\varphi_n(x) = \lambda(G_n \cap [a,x])$ y sea $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$. Note que si $h > 0$ es suficientemente pequeña para que $(x-h, x+h) \subset G_n$ $(x \in N)$, entonces $\dfrac{\varphi_n(x \pm h) - \varphi_n(x)}{h} = 1$.)

94. Sea $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$ y $g \in BV([0,2])$. Pruebe que $F(x) = \int_{[0,1]} f(t)g(x+t)d\lambda$ es absolutamente continua en $[0,1]$.

95. (La función singular de Lebesgue)
Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función singular de Lebesgue. Pruebe:

   a) $|f'(x)| \leq 1$ c.d. pero f no es de Lipschitz en $[0,1]$.
   (Sugerencia: $f'(x) = 0$ c.d. y $f(x) = 2^{-n}$ $\forall\, x \in (3^{-n}, 2(3^{-n}))$ y $f\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)3^{-n}\right) = 2^{-n}$. Así pues, $\dfrac{f\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)3^{-n}\right)}{\left(\dfrac{3}{2}\right)3^{-n}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ que tiende a infinito con n.)

   b) Existe $g : [0,1] \to [0,1]$ continua, estrictamente creciente y singular.
   (Sugerencia: Extienda a f a todo $\mathbb{R}$ poniendo $f(y) = 0$ si $y \leq 0$ y $f(y) = 1$ si $y \geq 1$. Sea $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ...\}$ una enumeración. Sea $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f(2^n(x - r_n))}{2^n}$, entonces la serie converge uniformemente, si $x_1 < x_2$ existe r_n tal que $x_1 < r_n < x_2$ de donde $g(x_1) < g(x_2)$. Por el teorema de diferenciación de series de Fubini, $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f'(2^n(x - r_n))}{2^n}$ c.d.)

96. Para toda función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue medible y $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ Borel medible tal que: $f = g \circ h$.
(Sugerencia: Sea $h : [0,1] \to [0,1]$ dada por $h(0) = 0$ y $h\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x_n}{3^n}$ donde la expansión binaria no tiene "cola de ceros". h es estrictamente creciente y $h([0,1])$ es nulo. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por: $g(x) = f(h^{-1}(x))$ si $x \in h([0,1])$ y $g(x) = 0$ de otro modo.)

97. Sea $X \neq \emptyset$ y $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Pruebe: Si $\Delta \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ entonces $\#(X) \leq c$.
(Sugerencia: $\exists\, \mathbb{E}_0 \subset X$ <u>numerable</u> tal que $\Delta \in S(\mathbb{E}_0 \times \mathbb{E}_0)$. Defina $l : X \to \mathcal{P}(\mathbb{E}_0)$ como sigue: $l(x) = \{E \in \mathbb{E}_0 : x \in E\}$ y verifique que es inyectiva.)

98. Pruebe que <u>no</u> existe $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ tal que $h * f = f$ $\forall\, f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.
(Sugerencia: Suponga lo contrario, halle $a > 0$ tal que $\int_{[-2a,2a]} |h| d\lambda < 1$. Sea $f = \chi_{[-a,a]}$, entonces $f(x) = \int_{[x-a.x+a]} h(t)d\lambda$, pero $\forall\, x \in [-a,a]$, $f(x) = 1$ y además $[x-a, x+a] \subset [-2a, 2a]$. Obtenga una contradicción.)

99. *a*) Sea $f : [-2,2] \times [-2,2] \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x,t) = \begin{cases} 0 & si\ x = t \\ \dfrac{xt}{x^2 - t^2} & si\ x \neq t \end{cases}$
   . Sea $F(t) = \int_{-2}^{2} f(t,x)dx$. Pruebe: $F'(0) = 0$ pero $\int_{-2}^{2} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0)dx$ <u>no</u> existe. Explique el fenómeno.

b) Ahora sea $f : [-2,2]\times[-2,2] \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x,t) = \begin{cases} 0 & si\ (x,t) = (0,0) \\ \dfrac{x|t|}{x^2+t^2} & si\ (x,t) \neq (0,0) \end{cases}$.
Sea $F(t) = \int_{-2}^{2} f(t,x)dx$. Entonces $F'(0)$ no existe. ¿Qué ocurre con $\int_{-2}^{2} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0)dx$?

100. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ acotado y sea $f_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada como sigue:
$f_r(x) = \begin{cases} 1 & si\ \exists\ e \in E\ tal\ que\ ||x-e|| < 1/r \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$. Pruebe:

a) $f_r \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$.

b) $\int_{\mathbb{R}^n} f_r d\lambda^{(n)} \to \lambda^{(n)}(E) \iff (\lambda^{(n)})(\partial(E)) = 0$.
(Sugerencia: Pruebe antes que $\overline{E} = \cap_{r=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R}^n : f_r(x) = 1\}$ y aplique el T.C.D.)

Bibliografía

[1] *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, R.G. Bartle, Wiley Classics (1995)

[2] *Functional Analysis*, G. Bachman, L. Narici, Academic Press (1966)

[3] *Measure and Integration*, S. K. Berberian, Chelsea (1970)

[4] *Measure Theory*, D. L. Cohn, Birkhäuser, Boston (1980)

[5] *Measure Theory*, P.R. Halmos, Springer G. T. M. #18 (1974)

[6] *Real and Anstract Analysis*, E. Hewitt, K. Stromberg, Springer G. T. M. #25 (1965)

[7] *The Theory of Functions of a Real Variable*, R. L. Jeffery, Dover (1985)

[8] *Modern Theories of Integrations*, M. H. Kestelman, Dover, (1960)

[9] *The Theory of Functions of a Real Variable*, I. P. Natanson, Ungar Vols. I, II (1974)

[10] Measure and Category, J. C. Oxtoby, Springer G. T. M. #2 (1980)

[11] *Real Analysis*, H. L. Royden, Macmillan, Third Edition (1998)

[12] *Real and Complex Analysis*, W. Rudin, McGraw Hill (1974)

[13] *Integral Measure and Derivative: A Unified Approach*, G. E. Shilov, B. L. Gurevich, Dover (1977)

[14] *General Theory of Functions and Integration*, A. E. Taylor, Dover (1985)

[15] *Measure and Integral*, R. L. Wheeden, A. Zygmund, Marcel Dekker Vol. 43 (1997)

[16] *Counterexamples in Probability and Real Analysis*, G. L. Wise, E. B. Hall, Oxford University Press (1993)