Cálculo Diferencial e Integral 1

Laboratorio 9 - El teorema del valor medio de Lagrange

Primavera 2017 - ITAM

1. Sea $f : [2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$, entonces $f(-2) = 0 = f(2)$ pero <u>no</u> existe $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$ ¿Se contradice el teorema de Rolle? (Ilustra).

2. (a) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$. Supón que $f'(c) \geq 2$ $\forall c \in (0, 1)$ y que $f(0) = 1$.
   Prueba que $f(x) \geq 1 + 2x$ $\forall x \in [0, 1]$. (Ilustra).

   (b) f como en el inciso (a). Prueba además que $\forall d \in [1, 3]$ existe una única $c \in [0, 1]$ tal que $f(0) = d$. (Usa el TVI).

3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, , b]$ y diferenciable en (a, b).
   Supón que $\exists$ $M > 0$ tal que: $|f'(c) \leq M$ $\forall c \in (a, b)$. entonces
   $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ $\forall$ $x, y \in [a, b]$.

4. Supón que $f(0) = 0$ y que f' es creciente en $(0, \infty)$. Sea $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Prueba que g es creciente. (Sugerencia: demuestra que $g'(x) > 0$, para esto necesitas probar que: $xf'(x) - f(x) > 0$ equivalentemente $f'(x) > \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Usa el TVM).

5. Complementa el teorema del punto fijo.
   Sea $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ continua. Supón f además que f es diferenciable en $[-1, 1]$ y que $f'(c) \neq 1$ $\forall c \in (-1, 1)$. Prueba que existe $x \in [0, 1]$ ÚNICA tal que $f(x) = x$. (Sugerencia: Sabemos que hay al menos una x. Si $y \in [0, 1]$ es otro punto fijo aplica el TVM al intervalo con extremos x y y).