Cálculo Diferencial e Integral 1

Laboratorio 6 - Continuidad y el Teorema del Valor Intermedio

Primavera 2017 - ITAM

1. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Supón que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Prueba que existe al menos una $c \in [a, b]$ tal que: $f(c) = g(c)$. (Ilustra). (Usa el Teorema del Valor Intermedio).

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Supón que f no se anula en $[a, b]$. Prueba que $f(x)f(y) > 0 \; \forall x, y \in [a, b]$. (Usa el Teorema del Valor Intermedio).

3. Prueba que si $a < b$ entonces la ecuación: $\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x+b)^2}$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$. ¿Hay más soluciones? (Ilustra).

4. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua con $f(\frac{1}{2}) \neq 1$ y $g(x) = 4x(1-x)$. Prueba que existen al menos dos puntos $c_1 \neq c_2$ en $[0, 1]$ tales que $f(c_j) = g(c_j)$ $(j = 1, 2)$. (Usa el Teorema del Valor Intermedio dos veces).

5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba : existe $c \in [a, b[$ tal que $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Más generalmente supón que $p, q \in [0, 1]$ son tales que $p+q = 1$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que: $f(c) = pf(a) + qf(b)$. (Usa el Teorema del Valor Intermedio).

6. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $(a_3 \neq 0)$ un polinomio cúbico. Prueba que $\forall d \in (-\infty.\infty)$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = d$, es decir: $Im(f) = (-\infty, \infty)$.