

Matemáticas II

Ejercicios: Propiedades del gradiente

1. Sea

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2.$$

Encuentra el vector gradiente en el punto $(2, 1)$ y utilízalo para hallar la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 8$ en el punto $(2, 1)$. Dibuja la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

2. Sea

$$f(x, y) = xe^y.$$

Calcula la derivada direccional de f en el punto $P = (2, 0)$, en la dirección de P a $Q = (1/2, 2)$. ¿En qué dirección f tiene la razón máxima de cambio?

3. Dada $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$.

- Dibuja la curva de nivel que pasa por el punto $(1, -1)$. Encuentra el vector ortogonal a la curva en ese punto y dibújala a partir de ese punto.
- Encuentra la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en $(1, -1)$ y la ecuación de la recta normal.

4. Si $f(x, y) = \ln(y - 3x)$.

- Calcula la derivada direccional de f en el punto $P(1, 4)$ en la dirección de P a $Q(-3, 1)$.
- Encuentra el máximo valor de la derivada direccional de f en el punto P e indica en qué dirección ocurre.

5. Encuentra la máxima razón de cambio de la función

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z},$$

en el punto $(4, 2, 1)$ e indica la dirección en que ocurre.

6. Considera la función

$$f(x, y) = xe^{-y} + \cos(xy).$$

- a) Encuentra la derivada direccional en el punto $P(3, 0)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{8}\mathbf{j}$.
- b) Encuentra el máximo valor de la derivada direccional en el punto $P(3, 0)$.

7. Considera la función

$$f(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Determina

- a) La derivada direccional en el punto $P(1, -1)$, en la dirección del vector $\mathbf{v}(-3, 4)$.
- b) La ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $P(1, -1)$.
- c) El vector unitario en la dirección en la que la función aumenta con mayor rapidez a partir del punto $P(1, -1)$.

8. Sea $f(x, y) = 4x^2 + y^2$.

- a) Calcula el gradiente de f en el punto $P_0(1, 2)$.
- b) Dibuja la curva de nivel de f que pasa por el punto $P_0(1, 2)$.
- c) Dibuja el gradiente en $P_0(1, 2)$ y la recta tangente a la curva de nivel en dicho punto.

9. Considera la función $f(x, y) = e^{x-2y}$.

- a) Encuentra la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 1)$.
- b) Encuentra la dirección en la que f crece más rápidamente en el punto $(2, 1)$ y calcula la derivada direccional en esa dirección y en ese punto.