Cálculo Diferencial e Integral I
Departamento de Matemáticas, ITAM
Examen Final Departamental
Primavera 2016

F

Nombre y cu: ____

1	2	3	4	5	6	7	8	Total

JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS
LEE CON CUIDADO LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS
NO se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas
Usa el reverso de cada hoja si es necesario
Tiempo: 2:45 horas

1. [0.5 ptos.] Calcula la derivada de $y = \dfrac{\cos^2(t^2)}{\operatorname{sen}^3(t^3)}$.

2. Considera la ecuación

$$3x = \operatorname{sen} x - \cos x.$$

a) [0.5 ptos.] Usa el teorema de valor intermedio para demostrar que la ecuación tiene *al menos* una solución.

b) [0.5 ptos.] Usa el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación tiene *a lo más* una solución.

3. Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 5}{x - 1}$.

a) [0.3 ptos.] Prueba que si $0 \leq x < 1$ entonces $x^2 - x + 5 \geq 4$.

b) [0.6 ptos.] Prueba formalmente que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{4}{x-1} = -\infty$. *Sugerencia:* ver pie de página[1].

c) [0.6 ptos.] Usa los dos incisos anteriores para argumentar que

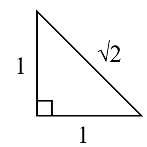
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$

[1] $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, si y solo si $\forall\, M < 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $a - \delta < x < a$ entonces $f(x) < M$.

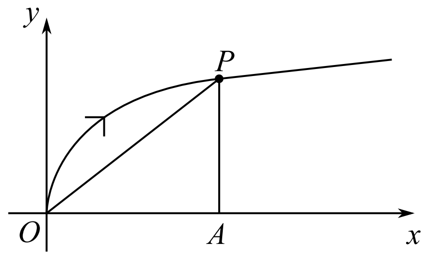
4. [1.0 ptos.] Usa linealización para dar un valor aproximado de

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + 0.1\right).$$

Sugerencia:



5. [1.5 ptos.] Una partícula P se mueve sobre la rama superior de la curva $x + \sqrt{x} = y^2 + y^4$. La coordenada x de P crece a razón de $1/2$ cm/seg. Determina que tan rápido crece el área del triángulo OAP cuando las coordenadas de P son (1, 1).

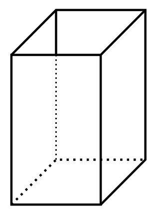


6. Una caja rectangular sin tapa y con base cuadrada debe tener un volumen de 16m^3. Material para los lados de la caja cuesta \$1 por m^2 y material para el fondo cuesta \$4 por m^2.

   a) [1.0 ptos.] Determina las dimensiones de la caja que minimizarían el costo de material.

   b) [0.5 ptos.] Verifica que tu respuesta corresponde en efecto a un mínimo.

   c) [0.5 ptos.] Esboza la gráfica de la función de costo. Incluye en tu gráfica los dos comportamientos asintóticos que se observan.



7. [1.5 ptos.] Dibuja, etiquetando adecuadamente, la gráfica de una función $y = f(x)$ que satisfaga las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$.

c) $f(-3) = 0$.

d) $f(-2) = 2$.

e) $f(1) = 0$.

f) $f(3) = -2$.

g) $f(5) = 0$.

h) $f'(-3)$ no existe.

i) $f'(-1) = 0$.

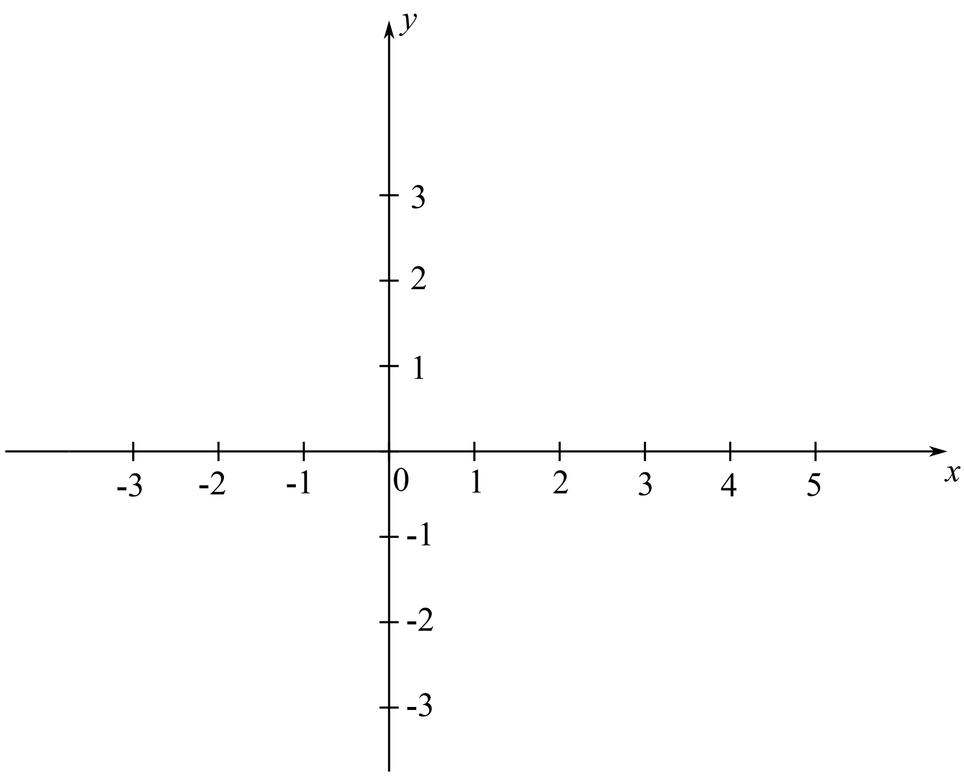
j) $f'(3) = 0$.

k) $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 3)$.

l) $f'(x) > 0$ si $x \in (-3, -1) \cup (3, \infty)$.

m) $f''(x) < 0$ si $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (5, \infty)$.

n) $f''(x) > 0$ si $(1, 5)$.



8. [1.0 ptos.] Determina constantes a y b tales que $F(x) = ax\operatorname{sen}(x) + b\cos(x)$ sea una antiderivada (primitiva) de $f(x) = x\cos(x)$.

Hoja extra